# 目　录

# 前　言

排队论是运筹学的一个分支，具有广泛的应用性。例如，顾客到商店购买东西，希望少排队或排短队，而商店则希望充分发挥营业员的工作效率。但是，由于顾客是随机来到商店的，营业员对每个顾客的服务时间也不一样，因此，有时顾客要排长队，有时营业员闲着无事。两者都造成损失。排队论可以根据顾客到达和服务时间的概率规律，制订既能满足顾客需求又能最大限度地发挥服务机构的经济效益的策略。

"顾客"和"服务员"有着广泛的意义。来犯的敌机可理解为顾客。"地对空"导弹抗击敌机可以理解为顾客服务。敌机什么时候来，事先是不知道的。瞄准射击时间也因人、因时而异。为了保证不受敌机袭击，需要配备多少防空武器，可以用排队论确定。机器在运转中发生故障是难免的，但什么时候发生却预料不到。修理机器的时间也不能确切料到。为了确定机器运转的可靠性也可用排队论。

总之，排队论可用于有大量服务过程的随机问题。

目前，排队论在国外应用很普遍。在国内已用于电讯、纺织、交通运输(海、陆、空)、矿山开采、计算机设计、生产流水线、技术设备可靠性、电子对抗，军事等方面。但总起来说，应用还不够普遍。在日益强调经济效益和科学管理的方针下，排队论将在我国社会主义建设中发挥越来越重要的作

用。但是，国内阐述排队论的书籍还不多，注重应用的书更是少见。就现有的排队论书籍来说，有两种类型：(1) 着重理论推导，适合理论工作者需要；一般工程技术人员难于掌握；(2) 只讲应用，不说公式的来龙去脉；因此，读者只能依样画葫芦，在实际应用时；很难发挥创造精神。

作者在高校多年从事"排队论原理及其应用"的教学，还在铁道科学研究院，长沙有色冶金设计研究院，铁道部第四设计院，上海铁路局南翔编组站等单位举办"排队论应用"讲习班。听过我讲课的同志，有的甚至是没有学过概率论、数理统计的同志，但都说，排队论"看得见，摸得着"，并不难。

近年来，作者和铁道科学院的同志一起，研究应用排队论在铁路运输中的应用取得了一定的成果。

本书是作者讲稿和科研经验的汇编，可供大专院校师生，科研、工程技术，设计和企业管理人员学习和参考。

本书同时兼顾理论上的系统性和完整性以及应用上的实践性。在内容安排上，采用以解决排队问题的步骤为线索，由简到繁，由浅入深，由特殊到一般。本书重点内容介绍如下：

(1) 讨论排队论的基础是正确确定顾客到达和服务时间的概率规律。本书第三、四、五章详细地介绍了排队论中常用的概率规律及其特征数；搜集和整理数据的科学方法；用实例说明理论分布与统计分布的比较方法和步骤。读者学完这三章，一般能够独立地分析、研究问题的概率规律。

(2) 讨论排队问题的核心是建立排队模型。第七章用大

量篇幅系统地介绍了很多特殊(马尔可夫)型的排队模型；运行(效率)指标的计算方法和实际应用。然后介绍一般(非马尔可夫)的排队模型。大家知道，这种模型，除个别简单的外，目前还没有分析解(这有待于理论工作者去完成)。因此，需要介绍更一般的方法。这就是本书第八章的内容，统计试验法。书中不但介绍了徒手模拟法，而且介绍了复杂问题的计算机模拟法。

(3) 讨论排队问题的目的是寻求问题的最优解。这是本书第九章的任务。随着电子计算机的广泛应用，以前不能解决的排队问题，现在可以用电子计算机解决了。本章系统地介绍了用电子计算机模拟过的经验公式，描述排队费用函数方程的方法，从经济价值角度，应用排队论，寻求最优解。

(4) 学习排队论是为了应用。本书第十章中搜集了国内、外有关科研成果和作者本人应用排队论的科研成果编成200个题解。它们包括：电话通讯，售票问询，社会服务，汽车加油，电子计算机设计，交通运输，军事等领域。读者可以从中复习所学理论，学到解排队问题的方法与技巧。

很多专家审阅本书后，一致认为，本书较全面地反映了排队论在各个领域中的应用，而且兼顾了基本概念和基础理论。它将会推动排队论在我国的应用，促进“四化”建设。

作者得到侯振挺教授和张启人教授的支持和帮助。

本书由中国科学院应用数学研究所副研究员董泽清同志审定。

本书初稿曾由中国铁道科学研究院运输研究所副所长、副研究员吴家豪同志，中南矿冶学院数学教研室副主任关家

骥副教授加以审阅；在定稿过程中，湖南大学魏力仁，国防科大何能福同志也提出了宝贵的意见。铁道科学研究院谢文炳，宋玉春，黄宣镌，许学谦还有茅允兰等同志为本书搜集和整理资料做了很多工作。在此，一并表示谢意。

由于本人水平所限，错误难免，敬请读者批评指正。

陆凤山

一九八三年六月

# 第一章 绪 言

## §1 排队问题

排队论是研究大量服务过程的数学理论。现实世界中排队现象，比比皆是。例如，到商店购买物品，汽车加油，轮船进港，电话订票等。各个领域内，排队内容虽然不同，但排队过程都有共同的特征：

(1) 有请求服务的人或物。如需要就餐的顾客，请求着陆的飞机等，我们统称它们为"顾客"。

(2) 有为顾客服务的人或物，如食堂服务员，飞机跑道等，我们都叫它"服务员"。由顾客和服务员组成服务系统。

(3) 顾客在随机的时刻，一个(批)、一个(批)地来到服务系统。每位顾客需要的服务时间也不一定是确定的。服务过程的随机性造成某个阶段顾客排长队；而某些时候，服务员又闲聊无事。

服务系统的服务能力取决于服务员的数目，服务员的能力，也取决于顾客流的性质。排队论的基本任务是建立顾客流，服务员能力，服务系统效益之间的合理关系。

服务系统的运行指标(取决于问题的条件和研究的目的)，用不同的数值和函数表示：

(1) 单位时间内，服务系统能够服务的顾客的平均数；

(2) 没有得到服务的顾客的百分比；

(3) 顾客立即得到服务的概率；

(4) 顾客平均排队时间；

(5) 等待服务时间的分布规律；

(6) 排队顾客的平均数；

(7) 排队顾客数量的分布律；

(8) 单位时间内，服务机构的平均收入等。

顾客到达和服务时间的随机性使服务过程成为随机过程。

如果排队服务过程是马尔可夫随机过程，用数学方法分析，比较容易。所谓马尔可夫随机过程就是使服务系统由一种状态改变到另一种状态的事件流都是泊松流（无后效性的流）。排队服务系统中的事件流，就是顾客流和服务时间流等。如果这些流不是泊松流，则用常规数学方法描述这种服务过程，比较困难。迄今，只有很少的、最简单的情况，获得了明显的解析性公式。有幸的是，很多服务过程可以近似地看作马尔可夫过程，它的运行指标可以近似地估计。服务系统内，配备的服务员数目越多，服务系统越复杂，越需要马尔可夫理论。

本书将介绍排队论的成果和它的实际应用。读者需要进一步学习近代排队论可以参考理论专著，例如，〔10〕，〔11〕，〔12〕。

## §2 服务系统分类及其主要性质

服务系统一般分为三类：

1. 损失制系统。当顾客到达这种服务系统时，服务员都不空，顾客立即离去，另求服务。例如，打电话遇到占线，用户搁置而去。敌机来犯，看作“顾客”到来，防空武器射击敌机

就是为"顾客"服务。若"服务员"都在"忙着"，有的敌机突破防空系统，进入我"设施"上空。这对服务机构说，是个损失，故称损失制服务系统。本系统的基本特征是，没有顾客排队队列，或顾客在系统内的排队时间为零。损失概率是本系统的基本运行指标。

2. 等待制系统。顾客到达本系统时，服务员都在为先到的顾客服务，只好参加排队，等待服务，一直等到有空的服务员为它服务为止。例如，列车到站时，列检组都不空，则车列在到达线上等待技术检查。本系统的基本特征，顾客无限排队。顾客排队时间是本系统研究的中心问题。

3. 混合制系统。在现实生活中，很多服务系统介于损失制和等待制之间。当顾客到达时，服务员都不空，他就排队。如果顾客到达时，服务员不空，且排队位置满座，顾客立即离去，永不再来。这是排队长度有限的服务系统。例如，出差住宿，招待所客满，只好另找旅社。本系统的特点，服务系统容量有限制。

混合制的另一种情形：顾客到达时，服务员不空，他就排队，等待服务。当顾客等了一段时间后，仍轮不到为他服务，顾客离开排队队列，另求服务。这叫排队时间有限的服务系统。这种系统内的顾客叫做没有耐心的顾客。例如，药品、电子元件等过期失效。服务系统的容量，顾客在系统内的逗留时间等是本系统的重要指标。

在等待制和混合制系统中，有服务规则问题：(*a*) 按顾客到达先后给予服务，或称先到先服务。这是最普通的情况。(*b*) 随机服务。当一个顾客被服务完了后，服务员从排队的顾客中，任取一个，给予服务。如长途电话的话务员就是这样做的。(*c*) 优先服务。例如，旅客中的老、弱、妇、幼比普通旅

客可以优先上车；加急电报先于普通电报的拍发等。

此外，服务系统还可以分为两大类：开放式和闭合式。前者是服务完了后顾客不是立即回到顾客到达流中，或者说，顾客到达流的特性与系统的状态无关。有的书上，把这种情况叫做顾客源无限。后者表示服务完了的顾客立即回到顾客到达流中，或者说，系统服务的顾客是固定的。例如，电铲—汽车系统。电铲为汽车装车；卸空的汽车又要电铲装车。

如果服务系统内只有一个服务员，则叫单通道服务系统。在系统内配备多个服务员的叫多通道服务系统。

## §3 经典排队模型的符号表示

古典的排队模型用四个符号表示，在符号之间用竖线隔开，即$A|B|n|m$。第一个符号$A$表示顾客到达流或顾客到达间隔时间的分布律；第二个符号$B$表示服务时间的概率分布；第三个符号$n$表示服务员的数目；最后一个符号$m$—顾客排队容许长度或系统内顾客的容量。$0\leqslant m\leqslant\infty$。当$m=0$时，服务系统为损失制；$m$为有限整数时为混合制系统；在等待制系统中$m=\infty$。这时$\infty$省略不写。例如，$M|M|1$表示顾客到达流为最简单流，或用顾客到达间隔时间时为指数分布；服务时间为指数分布；系统内只有一个服务员；等待制系统。$E_k|G|n|m$表示$k$阶爱尔朗流，任意服务时间，多通道，系统内容许有$m$个顾客排队。应该指出，这些符号表示是不完全的。因为还有很多模型不能用这种符号表示。

## §4　服务系统的运行指标

为了估计服务系统的服务质量，确定服务系统的最优参数，判断服务系统的运营结构，需要提出服务系统的运行指标：

1. 绝对通过能力，记作$A$。即单位时间内，被服务顾客的数学期望；

2. 相对通过能力，记作$Q$。即被服务的顾客数与请求服务的顾客数的比值；

3. 系统损失概率，记作$P_{损}$。即服务系统满员的概率，或者说，服务员都在忙着，排队位置满座的概率；

4. 系统内顾客数的期望值，叫队长记作$L_{系}$；

5. 系统内排队顾客数的数学期望，叫排队长记作$L_{队}$；

6. 顾客在系统内逗留时间的数学期望，记作$W_{系}$；

7. 顾客排队等待服务时间的数学期望，记作$W_{队}$，这里逗留时间等于排队时间加服务时间；

其它运行指标可以根据具体排队问题和研究的目的确定。

求这些指标时，都是以求解含有系统状态，即系统的顾客数为$n$的概率$P_n(t)$的方程。这种方程的解有：瞬时的和极限平稳的(统计平衡)。所谓瞬时的就是这些指标$L_{系}(t)$，$L_{队}(t)$，$W_{系}(t)$，$W_{队}(t)$与已经运营的时间$t$有关。所谓极限平稳就是服务系统运营充分长的时间后，这些运行指标$L_{系}$，$L_{队}$，$W_{系}$，$W_{队}$已经不随时间的变化而变化了。在实际应用时，极限平稳的解较实用。只有少数情形，才考虑瞬时的解。因此本书中主要讨论极限平稳性质。应该注意，我们叫极限，并不一定求$t\to\infty$时的极限而是令它的导数为零即可。因此，极限概率也叫稳态概率。

# 第二章　马尔可夫随机过程

## §1　马尔可夫随机过程

顾客以不相等的间隔时间来到服务系统．每个顾客需要的服务时间也不是确定的．其结果，有的时候顾客密集到达，有的时候松散到达．因而，排队服务过程是随机过程，排队问题是随机问题．求解随机问题要比确定性问题复杂得多，建立数学模型很困难，更谈不上寻求“最优解”。但在某些条件下，也可建立结构简单，运行指标明显的数学模型．例如利用马尔可夫随机过程．

马尔可夫是俄国数学家，在本世纪初，他在经过多次试验后发现：在某些因素作用下，系统状态概率的转移过程中，第$n$次结果的概率规律常取决于第$(n-1)$次试验的结果，而与更早的结果无关．他首先对这种现象作了系统的研究．后来，学术界把这种过程叫做马尔可夫过程．

在建立马尔可夫随机过程概念之前，必须懂得，什么是一般随机过程．在自然界中，事物变化的过程可分为确定性和随机性两大类．所谓确定性就是事物变化的过程具有确定的形式．或者说，实物系统的状态是随时间而变化的（由一种状态转移到另一种状态），转移的规律，是事先可以料到的．如果系统状态变化的规律，事先不能确切知道；或者说，系统状态的变化是随机的，就叫随机过程．

实物系统可理解为技术装备，修理站，计算机，铁路枢纽，编组站，港口、码头等。系统的状态就是系统完全由定义状态变数所取的数值描述。例如，车站候车室在$t_0$时刻，有100个旅客，这是一种状态。经过任意的时间$\tau$，候车室里有101个旅客，这又是一种状态。简单地说，对事物变化的全过程，进行一次观测，得到的结果是一个时间$t$的函数，但对同一事物的变化过程独立地重复进行多次观测的结果是不相同的。

令$N(t)$表示在$(0, t)$时间内，到达顾客的总数。随着时间$t$的变化$(t\geqslant 0)$，到达的顾客数也发生变化。于是对所有顾客来说，就得到一族时间$t$的函数。而且任何$t$时刻，$N(t)$的取值是不能确切预知的。我们叫此族随机函数为随机过程。用符号$[N(t), t\geqslant 0]$表示。

马尔可夫随机过程的基本概念是系统的状态和状态的转移；或者说，描述系统状态的变数，由一个特定值，转移到另一个特定值，这时，我们说，系统实现了转移。例如，机械系统以正常工作的机床台数表示状态时，状态转移就是有一台或几台机床发生了故障。

所以，马尔可夫随机过程的定义是：在任意时刻$t_0$，实物系统过程"未来"时刻$t(>t_0)$的状态的概率特征，只取决于$t_0$时刻的状态，而与它更早的时刻$t(<t_0)$的系统所处的状态无关。

设系统$S$在$t_0$时刻的状态为$S_0$（见图2.1）。图中$(t<t_0)$

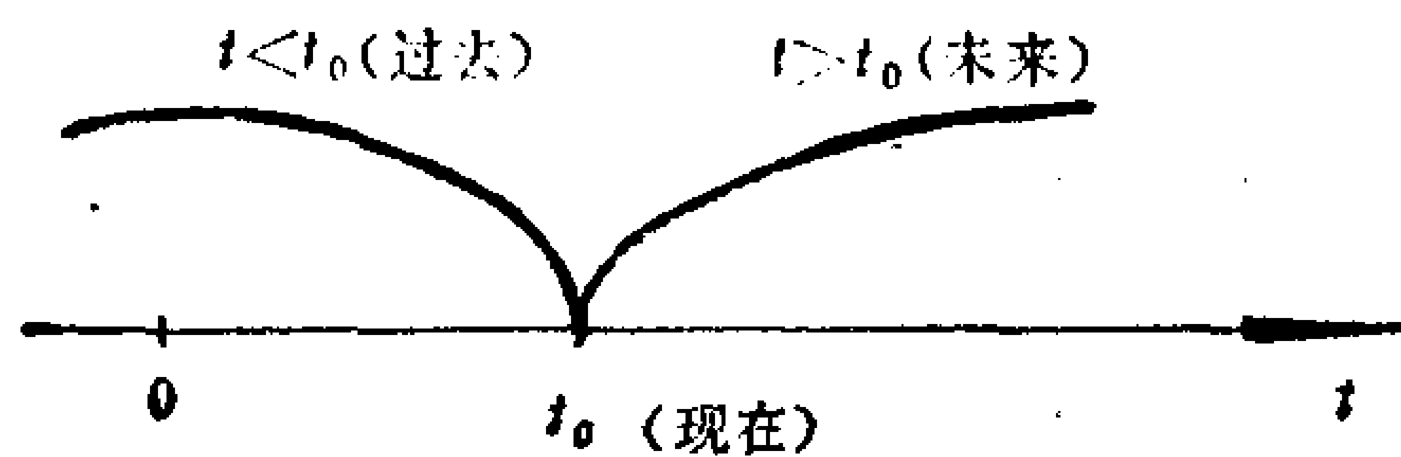



图2.1

表示系统的“过去”状态，($t>t_0$) 为系统的“未来”状态，$t_0$是现在所处的状态。我们感兴趣的只是系统的“未来”状态。“未来”状态能否预测呢？回答是这样的：确切的状态由于过程的随机性，事先难以奉告；但只就“未来”状态的概率特征，特别当系统的过程是马尔可夫随机过程时，“未来”状态是能够预测的。

现实的系统过程并不是精确的马尔可夫过程，但有一部分可以把它们看作马氏随机过程。(如果“过去”状态的所有参数和“未来”状态的参数的关系只通过“现在”的系统状态来体现，则该过程就是马尔可夫随机过程。例如，机械系统，在$t_0$时刻工作正常。这时，若简单地认为“系统正常”，则过程不是马尔可夫的；因为机械系统正常工作的概率，一般说，取决于机械装置已经工作了多长时间和最后一次故障发生的时间。如果把这两个参数都包括在“现在”状态内，则系统过程可以看作马尔可夫的)。因此，任何实物过程都只能近似于马尔可夫过程，因为不可能考虑系统的所有参数。即使如此，还是比不考虑随机因素时，更接近于实际。

## §2 离散状态的和连续时间的马尔可夫随机过程

在排队论中，离散状态的和连续时间的马尔可夫随机过程有很大作用。如果系统的可能状态有：$S_1$，$S_2$，…，$S_n$，…是可数的(可编号的)；系统状态的转移是跳跃式进行的，瞬时实现的。这种过程叫离散状态的随机过程。例如，车站上列车的数目；有故障机床的台数，排队的人数等。如果系统过程的状态转移可以在任意时刻发生，即随机的时刻或不确定的时刻发

生，这种系统过程叫连续时间的随机过程。例如，某机械系统由两台机床组成。每台机床都可能在任何时刻发生故障，一旦发生，立即进行修理。每次修理的时间，事先很难确定，或者说，也是随机的。

现在我们具体讨论上述机械系统的可能状态：

$S_0$—两台机床都在正常工作；

$S_1$—第一台机床发生故障，第二台机床正常工作；

$S_2$—第一台机床正常工作，第二台机床发生故障；

$S_3$—两台机床都发生故障。

系统状态的转移，实际上是瞬时实现的，即随机的时刻发生故障，随机的时刻修复启用。

在分析离散状态的随机过程时，运用几何图形是非常方便的。例如，用小方块中的$S_i$表示系统的状态，可能的状态转移用箭头线表示，这种图叫系统状态转移图（见图2.2）。图中，箭头线自$S_0$连接$S_1$表示系统的第一台机床由工作状态转移到故障状态；箭头线自$S_1$连接$S_0$，表示第一台机床的故障排除了，并转移到正常工作状态。图中其余箭头线表示的意义，读者自己可以分析。细心的读者也许会问，为什么$S_0$不和$S_3$连接？难道两台机床不可能同时发生故障吗？问题是有道理的。在此，我们只能说，两台机床同时发生故障的概率很小，可以忽略。详细解释见第三章例题(3.5)。

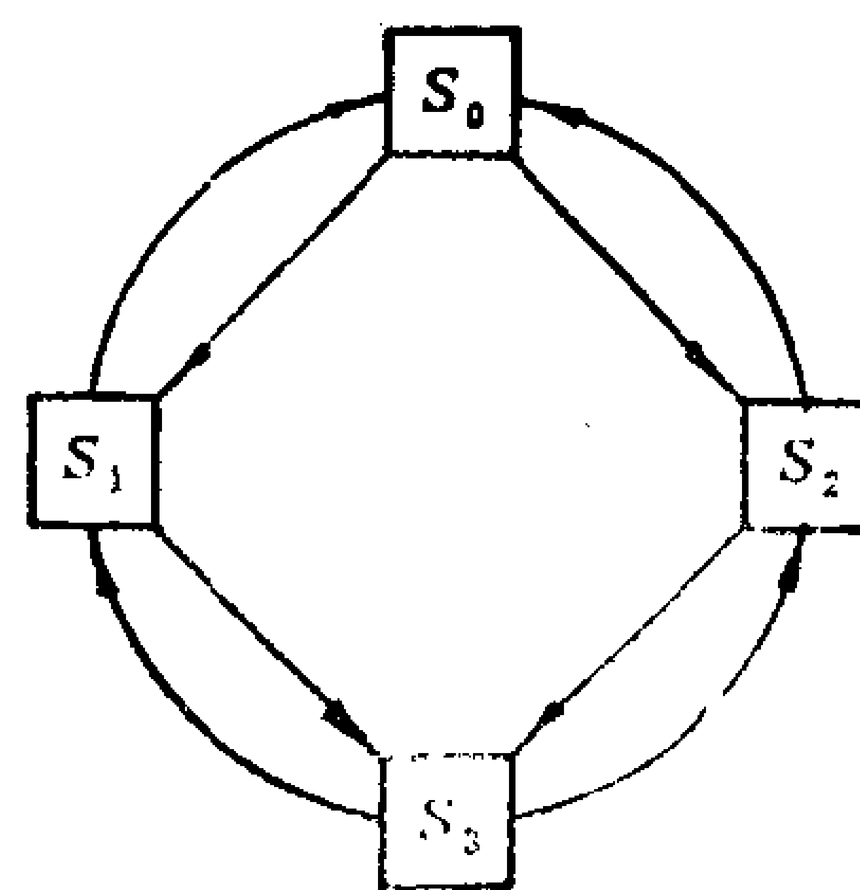


图2.2

如果系统的过程是离散状态的和连续时间的，则建立的数学模型，结构简单，运行指标明显。怎样建立排队模型，让我们先复

习一下概率论中的重要概念——事件流。在排队论中，事件流包括顾客到达流和服务时间流，详见下述。

# 第三章　事件流的理论分布

同类事件在随机的时刻一个(批)、一个（批）地来到服务系统的序列叫做事件流。例如，电话局的呼唤流，电子计算机的故障流，列车到站流，车列作业时间流等。求解排队问题，首先需要确定事件流的概率分布；或者说，在$t$时间内，发生$n$个事件的概率。本章简要介绍排队论中几种常用的事件流。在解决实际问题时，往往只需要概率分布的数学特征：数学期望(平均值）$M$；均方差(偏离值）$\sigma$；偏离系数$v$。事件流的偏离系数$v$能够反映流的随机性，在铁路运输中叫不均衡性，在纺织业中叫变异性。

事件流可以看作时间轴上“点”的分布。应该注意，这些点是随机地落在时间轴上的(见图3.1)。

须要说明：这里讲的事件与概率论中的事件有区别。在概率论中，事件或随机事件具有概率意义。这里讲的事件本身没有概率意义，但在另一方面，具有概率性。例如，在$\tau$时间内，正好有$n$个事件发生的概率；或在$\Delta t$时间内，有一个事件发生的概率；或相邻两事件发生的间隔时间小于$t$的概率。

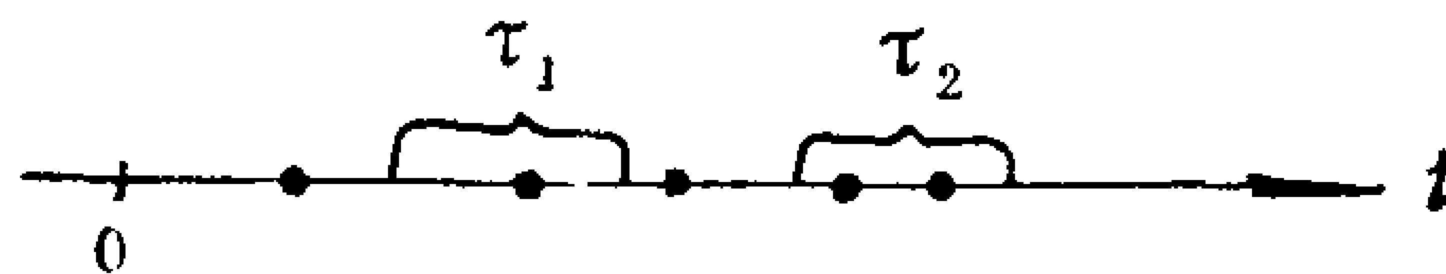



图3.1

事件流的重要特征是它的强度$\lambda$（单位时间内，发生的事件的平均数)、流的强度有固定不变的，〔$\lambda=const$〕；有随时间

变化的[$\lambda=\lambda(t)$]。例如，市内行驶的汽车，白天的强度大于夜晚的，高峰期的强度大于其余时间的。有规律的流也叫调整流，事件发生的间隔时间是固定不变的。实际的事件流都具有随机的间隔时间。

## §1 事件流的概率分布及其数字特征

在排队服务过程中，单位时间内，到达的顾客数或顾客到达间隔时间和服务时间都是随机变数。每次实现都有一个可能取的值。在随机因素的作用下，可能取的值，往往不等；且在实现之前，这些数值是难于事先确切知道的。但在实际应用时，不仅需要知道随机变数可能的取值，而且需要知道它的概率。随机变数$X$的可能值与其相应的概率$P$之间的关系叫做随机变数$X$的概率分布。随机变数分为离散的和连续的两大类。离散随机变数$X$的概率分布可以用表格的形式表示(见表3.1)。这张表叫随机变数$X$的分布序列。

表3.1

| $X_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

连续随机变数的概率分布不能用上述形式表示，因为它有无限个值充满在一个时间区段内。通常用概率分布函数表示，即

$$F(x)=P(X<x)。$$

式中　$P(X<x)$—随机变数$X$小于某个值$x$的概率。分布函数$F(x)$也叫积分分布函数。连续随机变数的分布往往用概率密度函数$f(x)$表示。概率密度具有如下性质：

(1) $f(x) \geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$；

(3) $P\{x_1 < X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx;$$

(4) 若$f(x)$在点$x$处连续，则有$F'(x) = f(x)$，

即
$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x < X \leqslant x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

由此可见，概率密度的定义与物理学中线密度的定义相类似。因而，$f(x)$叫概率密度。

由上式可见，若不计高阶无穷小，有

$$P\{x < X \leqslant x + dx\} = f(x)dx.$$

这表示落在小区间$(x, x+dx)$内的概率近似地等于$f(x)dx$。

所以，概率密度是分布函数的一次导数，即

$$f(x) = F'(x).$$

分布函数也可以通过概率密度求得：

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(x)dx.$$

随机变数的主要特征数有：数学期望$M(X)$，方差$D(X)$和均方差$\sigma(X)$。

离散随机变数的数学期望是随机变数的可能值与其相应概率之积，即

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

因此，$M(X)$是随机变数数值$x_1$，$x_2$，…，$x_n$及其相应概率$p_1$，

$p_2$，…，$p_n$的加权平均值。

连续随机变数X的数学期望为：

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

在很多文献中，数学期望的表示方法有：

$M(X)$——一般表示法；

$\bar{m}_x$——具体分布的数学期望；

$\bar{x}$——随机变数的算术平均数。

随机变数X的方差为：

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

随机变数的方差是度量随机变数偏离数学期望的特征数。若$M(X)=\bar{m}_x$，则可按下式计算离散随机变数X的方差，即

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{m}_x)^2.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x_i-\bar{m}_x)^2, \text{ 当} n=\infty.$$

连续随机变数X的方差为：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{m}_x)^2 f(x) dx.$$

为了计算方便，通常按下式进行，

$$\begin{aligned} D(X)&=M[X-M(X)]^2\\ &=M\{X^2-2M(X)X+[M(X)]^2\}\\ &=M(X^2)-2M(X)M(X)+[M(X)]^2 \end{aligned}$$

或 $$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

方差的开方就是随机变数X的均方差，即

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}.$$

随机变数除上述特征数外，还有特征数矩，记作$\alpha$。随机变数X的$k$阶原点矩叫做随机变数X的$k$次方的数学期望，即

$M(X^k)$。一阶原点矩为：$\alpha_1 = M(X)$。或者说，随机变数$X$的一阶原点矩等于它的数学期望。二阶原点矩为：

$$\alpha_2 = M(X^2)。$$

因而，随机变数$X$的方差为

$$D(X) = \alpha_2(X) - [\alpha_1(X)]^2。$$

在排队论中还经常用偏离系数这个特征数，即

$$v(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)},$$

偏离系数是随机变数的均方差和数学期望的比值。

## §2　排队论中的常用事件流

顾客到达间隔时间和服务时间不可能是负值。因此，它们的分布是非负随机变数的分布。在排队论和可靠性理论中，经常遇到的分布有：二项分布，泊松分布(最简单流)，爱尔朗分布，广义爱尔朗分布，超指数分布和正态分布等。现分别讨论于后：

(1) 二项分布。设进行$n$次独立试验。每次试验结果，或者发生事件$A$，或者发生事件$A$的对立事件。每次试验发生事件$A$的概率都是$p$。发生$A$的对立事件的概率为$q = 1 - p$。如果在$n$次试验中，事件$A$发生$m$次，则它的对立事件发生$(n-m)$次。这时，二项分布为：

$$P_{[n]} = p_{m=0} + p_{m=1} + \cdots + p_{m=i} + \cdots + p_{m=n} = 1$$

或

$$P_{[n]} = (p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}p^{n-2}q^2 + \cdots + C_n^m p^m q^{n-m} + \cdots + q^n = 1 \qquad (3.1)$$

式中　$P_{[n]}$—在$n$次重复试验中，两个对立事件中发生任何一个

事件的概率；

$p$—在一次试验中，事件$A$发生的概率；

$q$—在一次试验中，事件$A$的对立事件发生的概率；

$C_n^m$—$n$个事件按$m$种组合；

$n$—独立试验的次数；

$m$—在$n$次独立试验中，事件$A$发生的次数。

当$n$和$p$给定时，事件$A$发生的次数不少于$i(m\geqslant i)$次的概率为：

$$p_{m\geqslant i}=p_{m=i}+p_{m=i+1}+\cdots+p_{m=n}$$

或 $$p_{m\geqslant i}=1-(p_{m=0}+p_{m=1}+\cdots+p_{m=i-1}).$$

有时需要求事件$A$发生的次数不多于$m$次的概率，即一次也不发生，发生一次或二次或$m$次的概率：

$$\sum_{m=0}^{m}p_n(m)=p_n(0)+p_1(0)+\cdots+p_n(m).$$

在$n$次独立试验中，正好发生$m$次的概率：

$$p\{k=m\}=p_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=p^m(1-p)^{n-m}\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{m(m-1)\cdots2\cdot1(n-m)[n-(m+1)]\cdots2\cdot1}.$$

式中 $n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$。

现在我们求随机变数$m$的数学期望：

$$M(m)=\sum_{m=0}^{n}mC_n^m p^m q^{n-m}.$$

$$=\sum_{m=1}^{n}m\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]}{m!}$$

$$\times p^m(1-p)^{n-m}$$

$$=np\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(m-2)]}{(m-1)!}$$

$$\times p^{m-1}(1-p)^{(n-1)-(m-1)}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}=np,$$

即 $$M(m)=np. \tag{3.2}$$

可得 $$M(m^2)=M[m(m-1)+m]=M[m(m-1)+M(m)]$$

$$=\sum_{m=0}^{n}m(m-1)C_n^m p^n(1-p)^{n-m}+np$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{m=2}^{n}\frac{(n-2)(n-3)\cdots[(n-2)-(m-3)]}{(m-2)!}$$

$$\cdot p^{m-2}(1-p)^{(n-2)-(m-2)}+np$$

$$=n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2}+np$$

$$=n(n-1)p^2+np.$$

从而，随机变数$m$的方差为：

$$D(m)=M(m^2)-[M(m)]^2$$

$$=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq$$

或 $$D(m)=npq. \tag{3·3}$$

**例题3.1** 铁路中间站货物线长度设计。设编组站按图定每昼夜给中间站送车三次（一年共送 $3\times365=1095$ 次）。每列车由30辆组成，其中有$m$辆是装集装箱的平板车。根据统计，每年平均送到中间站的平板车有1650辆，共装集装箱19700只。平均每列车中有平板车$\bar{m}=1650\div3\times365=1.5$辆。

**解** 据题意，列车中不是平板车，就是其它车辆。在每列车中挂有装集装箱的平板车的概率为 $p=\frac{\bar{m}}{n}=\frac{1.5}{30}=0.05$，它的对立事件（不是平板车）的概率$q=1-0.05=0.95$。

按公式 $p(k=m)=p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ 计算，其结果列于下表：

| 挂平板车的数目 | 概　　率 | 一年内发生次数 | 累计频数 | 累计次数 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $p_0=\frac{30!}{0!(30-0)!}0.05^0\times0.95^{30}$ $=0.2146$ | $1095\times0.2146$ $=235.0$ | 0.2146 | 235.0 |
| 1 | $p_1=0.3389$ | 371.1 | 0.5535 | 606.1 |
| 2 | $p_2=0.2586$ | 283.1 | 0.8122 | 889.2 |
| 3 | $p_3=0.1270$ | 139.1 | 0.9392 | 1028.3 |
| 4 | $p_4=0.0452$ | 49.4 | 0.9844 | 1077.7 |
| 5 | $p_5=0.0124$ | 13.6 | 0.9967 | 1091.3 |
| 6 | $p_6=0.0027$ | 3.0 | 0.9994 | 1094.3 |
| 7 以上 | $p_{(K\geq7)}=0.0006$ | 0.7 | 1.000 | 1095. |

由表中数据可见，车列中挂有$m$辆装集装箱的平板车的概率。本题中最大概率为 $p_1=0.3389$，即车列中挂一辆装集装箱的平板车的概率为33.89%。列车中不挂平板车的概率 $p_0=0.2146$。或者说，一年内有$1095\times0.2146=235$次不挂平板车；挂 2 辆平板车的有 372 次，挂三辆平板车的有 283 次…（见上表）。由表中数据可见,装卸线的长度可按 $m=5$ 辆平板车长度设计，这时，可靠性达到99.67%。

（2）最简单流，记作$M$。最简单流又叫平稳的泊松流，在排队论中，有它特殊的地位。有必要进行详细的讨论。

$a$）流的平稳性．设在时间轴$ot$上，在时间区段$\tau$内，落入任何数量的事件的概率，只与$\tau$的长度有关，而与$\tau$在时间轴上的位置无关（见图3·1）。平稳流的强度$\lambda$，应该是固定的．但不是说，单位时间内，实际发生的事件数是固定的．任何事件流，只要不是调整流，不可避免地有密集和松散发生。对平稳

流而言，事件发生的密集与松散，没有确定的规律性。即在单位时间内，发生的事件数有多、有少。但在研究阶段内，事件的平均数应该是相等的。

初学者容易发生一个错误，把随机的密集和松散，说成是流的强度的变化。

一般，偏离平稳流有其物理原因。例如，电话呼唤流，夜晚比白天少，因为人们习惯在晚上睡觉。节日上街的人比其它时间多，因为节日是非工作日。如果事件流具有明显的，特别是周期性的密集与松散，应揭示其物理原因。实际的事件流，往往在某段时间内是平稳的。例如，电话呼唤流在11点到12点时是平稳的。通常，便于计算，往往把平稳流扩大到任意长的时间区段。设$N(t)$表示在0到$t$时刻，到达的顾客数。对任给$t(\geqslant 0)$，在$(t, t+\Delta t)$时间内，到达一个顾客的概率$p_1(t, t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。式中$\lambda(>0)$是一个常数，它与时间$t$无关。这就反映流的平稳性。$\Delta t$是时间增量；$o(\Delta t)$表示很小的符号。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0.$$

这个表达式反映了流的有限性。

b）流的无后效性。在时间轴$ot$上，互不相交的时间区段$\tau_1$和$\tau_2$内，发生的事件数是相互独立的（见图3·1）。按其本质说，每个事件发生的时刻互不相关。例如，顾客到百货公司购买物品，一般，无后效性。因为顾客们不可能约好，在某个时间，一起上百货公司。但是，当百货公司出售紧俏物资时，顾客流就有后效性。衔接方向多的铁路编组站，改编列车到站流近似于无后效性。当车站衔接方向较少时，前一列车的到站时刻影响后一列车的到站时刻，就有后效性。

c）流的普通性．在同一瞬间，多于一个事件发生的概率的实际不可能性；或者说，同时到达两个及两个以上顾客的概率比到达一个顾客的概率小到可以忽略的程度．流的普通性表示事件是逐个发生的．如到医院拔牙，到达车站的列车等．

同时具有平稳性，无后效性和普通性的流叫做最简单流．最简单是指比其它流有最简单的数学处理．读者容易误认为调整流最简单．其实，调整流具有后效性，事件发生的时刻是固定的函数关系，如果没有特别的“措施”，这种流是难于建立的．

现在讨论最简单流的概率分布．最简单流的一维概率分布是指在$t$时间内，有$m$个事件发生的概率．

设长为$t$的时间区段分成$n$等分，每份的长度为$\Delta t=\frac{t}{n}$．若在$\Delta t$内，落入一个“点”．例如，到达一个顾客，则$\Delta t$被“占着”．如果在$\Delta t$内，没有落到一个“点”（没有顾客到达），则$\Delta t$“空着”．因为$\Delta t$被“占着”的概率近似为$\lambda\Delta t=\frac{\lambda t}{n}$；$\Delta t$被“空着”的概率近似为$1-\lambda\Delta t=1-\frac{\lambda t}{n}$（见公式3·16）．由于流的无后效性，我们可以说，在$n$个$\Delta t$中，有“点”占着或没有“点”空着可以看作$n$次独立试验．我们的问题是求在$n$个$\Delta t$中，有$m$个被占着的概率．根据二项分布，应当是：

$$p_n(m)=C_n^m\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}. \qquad (3\cdot 4)$$

当$n\to\infty$时，

$$p_n(m)=\lim_{n\to\infty}C_n^m\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\times\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}$$

$$=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n}\right]\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}$$

$$=\frac{(\lambda t)^m}{m!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^n=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t},$$

即 $$p_n(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}. \tag{3·5}$$

此即在长度为 $t$ 时间内，有$m$个事件发生的概率．或叫最简单流的一维概率分布。式中：

$m$—发生事件的数目，只取整数与零；

$e$—自然对数的底（$e=2.71828$）；

$m!$—数列的阶乘，$m!=m(m-1)\cdots3\cdot2\cdot1$。

当$t=1$时，公式（3·5）为

$$p_{(m)}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \tag{3.6}$$

有时，需要确定给定的事件数目的概率．例如，求 $t$ 时间内，到达$k$个或少于$k$个事件的概率。即

$$p_t(m\leqslant k)=\sum_{m=0}^{m=k}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

求$t$时间内，有$k$个以上事件的概率．它是少于或等于 $k$个事件概率的对立事件．即

$$p_t(m>k)=1-p_t(m\leqslant k)=1-\sum_{m=0}^{m=k}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

求$t$时间内，少于$k$个事件的概率．

$$p_t(m<k)=p_t(m\leqslant k-1)=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

求$t$ 时间内，多于或等于$k$ 个事件的概率．它是少于$k$个事件的概率的对立事件。即

$$p_t(m)=1-p_t(m<k)=1-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

最简单流的平均特征，即单位时间内，发生的事件的平均数。事实上：

$$M(m)=\bar{m}=\sum_{m=0}^{\infty} m\ p(m)=\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

当$m=0$时，和式的首项等于零。所以，从$m=1$开始加总。因为$\lambda^m=\lambda\cdot\lambda^{m-1}$；$m!=m(m-1)!$因而

$$\bar{m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\lambda\lambda^{m-1}}{m(m-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}.$$

令　$m-1=\mu$，则$m=1$时，$\mu=0$。

∴　$$\bar{m}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\mu}}{\mu!}=\lambda e^{-\lambda}e^{+\lambda}=\lambda。$$

所以，　$\bar{m}=\lambda$。　　(3.7)

即最简单流的平均特征数等于它的参数。

现在求最简单流，$t=1$时，偏离平均值的特征。

$$D(m)=M(m^2)-(\bar{m})^2.$$

∵　$\bar{m}=\lambda$，∴ $(\bar{m})^2=\lambda^2$。

因而，　$D(m)=M(m^2)-\lambda^2$。

现在求$m^2$的平均数：

$$\begin{aligned}M(m^2)&=\sum_{m=0}^{\infty}m^2p(m)=\sum_{m=0}^{\infty}m^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}m^2\frac{\lambda\cdot\lambda^{m-1}}{m(m-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{m=1}^{\infty}m\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-1}\\&=\lambda\sum_{m=1}^{\infty}[(m-1)+1]\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}\\&=\lambda\Big[\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}\\&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda}\Big].\end{aligned}$$

令 $m-1=\mu$，则$m=1$时，$\mu=0$。

$$\therefore \qquad M(m^2)=\lambda\left[\sum_{\mu=0}^{\infty}\mu\frac{\lambda^\mu}{\mu!}e^{-\lambda}+\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\mu}{\mu!}e^{-\lambda}\right]$$

$$=\lambda\left[\lambda+e^{-\lambda}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\lambda^\mu}{\mu!}\right]=\lambda[\lambda+e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}]=\lambda(\lambda+1)$$

或 $\qquad D(m)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$，

因而，$\qquad \bar{m}=D(m)=\lambda$。 (3·8)

即最简单流的平均值等于它的偏离值，等于流的参数$\lambda$。

**例题3.2** 每天到达某站有75列车。长时间运行表明，每天晚点到站列车占8%。设列车到达服从最简单流。试求晚点三列车的概率？

**解** 按题意，每天平均晚点的列车数为：

$\lambda=75\times0.08=6$列。

所以，晚点三列车的概率为：

$$p=\sum_{m=4}^{75}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=1-\sum_{m=0}^{3}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

$$=1-\sum_{m=0}^{3}\frac{6^m}{m!}e^{-\lambda}=1-(e^{-6}+6e^{-6}+18e^{-6}$$

$$+36e^{-6})=0.8487,$$

即每天晚点三列车的概率为85%。

**例题3·3** 铁路和公路平面交叉。当有火车通过交叉点时，横木挡住汽车通过。每次火车通过时，平均封锁公路三分钟。公路上平均每分钟有四辆汽车通过交叉点。求火车通过交叉点时间内，汽车排队长度超过50米的概率（即排队汽车超过13辆的概率）。

**解** $p=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$。

式中　　$\lambda = 3 \times 4 = 12$辆/分钟。

$$\therefore \quad p = 1 - \sum_{m=0}^{12} \frac{12^m}{m!} e^{-12} = 0.424.$$

即大约有42%的情况，汽车排队长度超过50米。

**例题3.4**　湖南醴陵瓷厂用汽车把500件瓷器运往长沙。运送过程中，瓷器破损的概率0.002。求破损三件瓷器的概率，少于三件、多于三件的概率和至少有一件破损的概率。

**解**　据题意有500件瓷器为很大的数，瓷器破损的概率0.002是很小的数。每件瓷器破损是独立的。因而，本题可按下式计算：

$$p_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

$$\because \quad \lambda = np = 500 \times 0.002 = 1.$$

∴　a）破损瓷器少于三件的概率或有0，1，2件瓷器被损坏的概率，它等于：

$$p_{500}(m<3) = \sum_{m=0}^{2} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.9197.$$

即有少于三件瓷器破损的概率为92%。

b）有三件瓷器被损坏的概率

$$p_{500}(m=3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = 0.0613,$$

即有6%的可能性。

c）有多于三件破碎的概率，即

$$p_{500}(m>3) = 1 - p_{500}(m \leqslant 3) = 1 - 0.9197 - 0.0613 = 0.02,$$

即可能性不大。

d）至少有一件被损坏的概率：

$$p_{600}(m=1)=1-p_{600}(m=0)=1-e^{-1}=0.632$$

即有63%的可能。

**例题3.5** 如果事件流是泊松流。求有两个以上事件同时发生的概率？

**解** 按公式$p_t(m)=\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}$，

当$m=1$时，在$t$时间内，有一个事件发生的概率，$p_t(m=1)=\lambda t e^{-\lambda t}$。

当$m=0$时，在$t$时间内，没有事件发生的概率

$$p_t(m=0)=e^{-\lambda t}。$$

当$m>1$时，$p_t(m>1)=1-[p_t(0)+p_t(1)]=1-[e^{-\lambda t}+\lambda t e^{-\lambda t}]$

$$=1-\left\{\left[1-\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots\right]+\lambda t\left[1-\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\cdots\right]\right\}=\frac{(\lambda t)^2}{2}，当t很小时。$$

即 $$p_t(m>1)=\frac{(\lambda t)^2}{2}，当t很小时.$$

当$t\to 0$时，$p_t(m>1)$更快地趋近于零。因此，同时有两个以上事件发生的概率可以忽略不计。

最简单流在排队论中有着重要作用，因为：(1) 最简单流或近似于最简单流的事实，在实际工作中，经常遇到；(2) 最简单流的数学处理最简单；(3) 当实际流与最简单流有较大出入时，可以用实际流的密度代入最简单流中，这样得到的结果有时也能达到满足精度的要求；(4) 设计新的服务系统时，采用最简单流无非是从最困难的条件出发。

(3) 指数分布。最简单流的重要特征是相邻事件发生的间隔时间 $T$ 的分布。因为$T$是连续随机变数，所以其分布函数为

$$F(t)=P(T<t)。\tag{3.9}$$

即函数 $F(t)$ 是间隔时间$T$小于给定$t$的概率。我们从$T$的起点$t_0$开始计算时间，再经历时间$t$，使$T<t$，如图（3.2）所示。

若发生一个最简单流，其强度为λ。我们感兴趣的是相邻事件发生的间隔时间$T$的分布．为了在$t$时间内求到至少发生一个事件的概率，我们运用它的对立事件，即在$t$时间内，没有事件发生的概率。

$$P(T\geqslant t)=1-P(T<t)$$

或 $$F(t)=1-P(T\geqslant t)\ .$$

式中 $P(T\geqslant t)$—在$t$时间内，没有事件发生的概率。即

$$P_0(t)=P(T\geqslant t)$$

或 $$F(t)=1-P_0(t).$$

为了求到$P_0(t)$，我们把$m=0$代入公式(3.5)得

$$P_0(t)=e^{-\lambda t},\quad t>0,$$

∴ $$F(t)=1-e^{-\lambda t},\quad t>0. \tag{3.10}$$

对(3.10)微分得：

$$F'(t)=f(t)=(1-e^{-\lambda t})'=\lambda e^{-\lambda t},\quad t\geqslant 0. \tag{3.11}$$

这里的$f(t)$表示事件发生的间隔$T$的分布密度．凡是具有 $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$的分布密度的分布律叫指数分布。分布密度如图(3.3)所示。

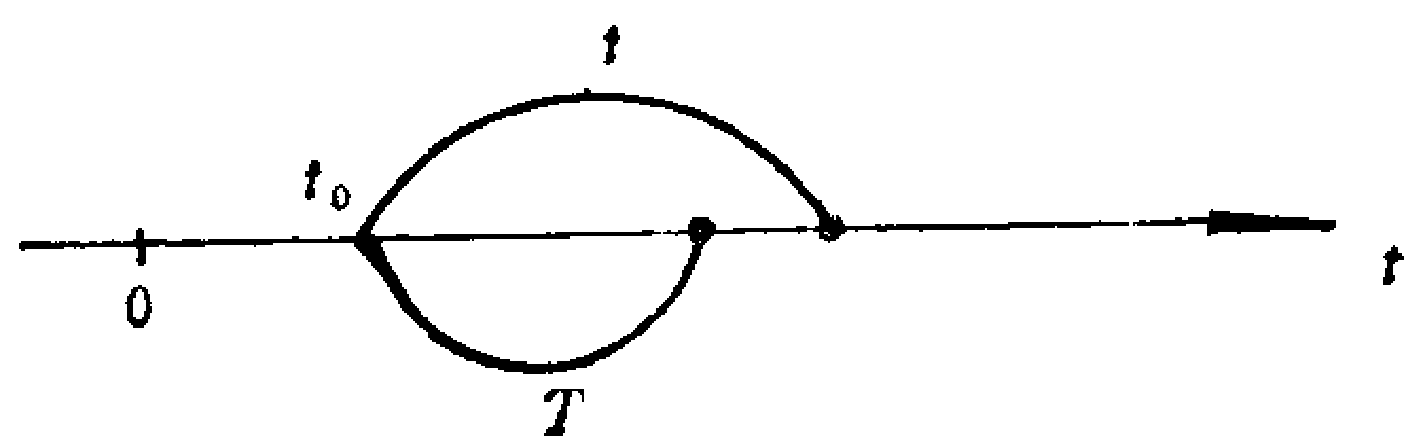


图3.2

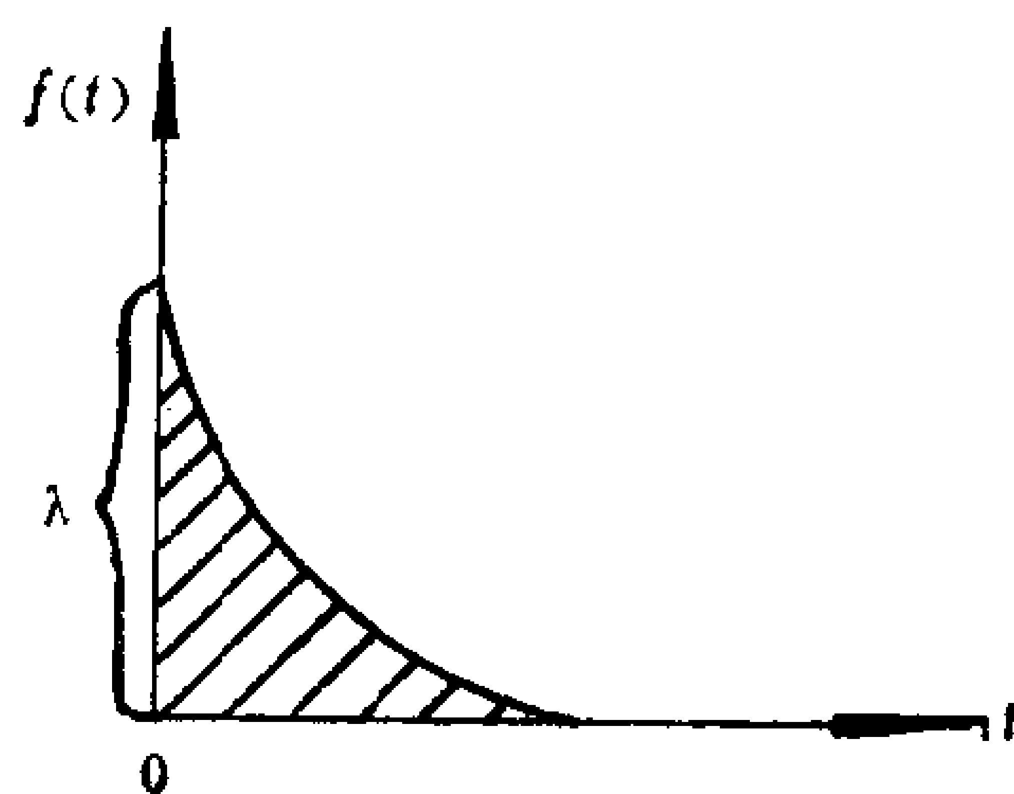


图3.3

现在我们求随机变数的数字特征：数学期望（平均值）$m_t$和方差$D_t$。我们根据定义有

$$m_t=\int_0^\infty tf(t)dt=\lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt.$$

用分部积分得

$$m_t=\frac{1}{\lambda}. \tag{3.12}$$

随机变数$T$的方差可以通过二阶原点矩求得：

$$D_t=\int_0^\infty t^2 f(t)dt-m_t^2=\int_0^\infty \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt-\frac{1}{\lambda^2}.$$

用分部积分得：

$$D_t=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.13}$$

随机变数$T$的均方差为：

$$\sigma_t=\sqrt{D_t}=\frac{1}{\lambda}. \tag{3.14}$$

因此，指数分布的数学期望等于均方差，它们都等于其参数的倒数。

现在我们求随机变数$T$的偏离系数：

$$v_t=\frac{\sigma_t}{m_t}=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}=1. \tag{3.15}$$

通过上述讨论，获得如下结论：

(1) 事件流为最简单流时，相邻事件发生的间隔时间 $T$服从指数分布；

(2) 事件发生的间隔时间 $T$服从指数分布时，它的偏离系数$v_t=1$。

(3) 相邻事件发生的间隔时间$T$的偏离系数等于1时，事件流为最简单流。

非平稳的泊松流的间隔时间$T$的分布律不是指数分布。它的分布取决于：(1) 第一个事件在时间轴$ot$上的位置；(2) 随时间而变化的强度$\lambda(t)$。不过，当$\lambda(t)$的变化相对于$T$的变化很慢时，可以近似地认为$T$是服从指数分布的[1]

现在我们可以说明在推导最简单流时提到过的一个问题：

设在时间轴上分布着一个最简单流，它的强度为$\lambda$，在时间轴上有一小段时间$\Delta t$，我们求在$\Delta t$时间内，发生一个事件的概率，即$\Delta t$被"占着"的概率。因为最简单流具有无后效性，所以在$\Delta t$时间内，发生一个以上的事件的概率可以忽略。用$p_0(\Delta t)$表示在$\Delta t$时间内，没有事件发生的概率，而$p_1(t)$—发生一个事件的概率。考虑到流的普通性，

$$p_1(\Delta t) \approx 1 - p_0(\Delta t),$$

而概率$p_0(\Delta t)$可按公式(3.5)确定：

$$p_0(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^0}{0!} e^{-\lambda \Delta t} = e^{-\lambda \Delta t},$$

从而 $$p_1(\Delta t) \approx 1 - e^{-\lambda t}.$$

把$e^{-\lambda \Delta t}$展开，不考虑高阶无穷小后，得：

$$p_1(\Delta t) \approx 1 - (1 - \lambda \Delta t) = \lambda \Delta t$$

或 $$p_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t. \tag{3.16}$$

即在$\Delta t$时间内，发生事件的概率近似于$\lambda \Delta t$。这里，$\lambda$是流的强度。

显然，这样的公式对非平稳的泊松流也是正确的[1]。即

$$p_1(\Delta t) \approx \lambda(t) \Delta t.$$

最后，讨论相邻事件间隔时间$t$在$\alpha$和$\beta$之间的概率：

$$p(\alpha < t < \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \lambda \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lambda\left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right)\Big|_\alpha^\beta = -e^{-\lambda t}\Big|_\alpha^\beta = e^{-\alpha\lambda} - e^{-\beta\lambda}$$

或　　$p(\alpha<t<\beta)=e^{-\lambda\alpha}[1-e^{-\lambda(\beta-\alpha)}]$。　　(3.17)

| 灯泡寿命(小时) | 平均寿命 | $m$ 灯泡数目 |
|---|---|---|
| 0—500 | 250 | 133 |
| 500—1000 | 750 | 45 |
| 1000—1500 | 1250 | 15 |
| 1500—2000 | 1750 | 4 |
| 2000—2500 | 2250 | 2 |
| 2500—3000 | 2750 | 1 |
| | | $n=200$ |

**例题3.6**　对200只灯泡进行寿命检验。检验结果列于右表。试问灯泡寿命是否服从指数分布。

**解**　200只灯泡的平均寿命为

$$m_t=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{200}n_it_i=133\times250+45\times750+15\times1250$$

$$+4\times1750+2\times2250+1\times2750=500(\text{小时}),$$

即每只灯泡的平均发光时间为500小时。

因为指数分布的参数 $\lambda=\frac{1}{m_t}=\frac{1}{500}=0.002$。

指数分布密度函数等于：

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}=0.002e^{-0.002t}，\quad t>0。$$

现在求落在"各组灯泡寿命"内的灯泡数目的概率：

$$p(\alpha<t<\beta)=e^{-\lambda t}-e^{-\beta\lambda}。$$

例如，在0—500小时内，$p(0<t<500)=e^{-0.002\times0}-e^{-0.002\times500}$

或　　$p(0<t<\beta)=1-e^{-1}=0.6321$。

即落在0—500小时内灯泡数的概率为0.6321。

同理可求：

$p(500<t<1000)=0.2326$；

$p(1000<t<1500)=0.0855$；

$p(1500<t<2000)=0.0315$；

$p(2000<t<2500)=0.0116$；

$$p(2500 < t < 3000) = 0.0042.$$

现在我们计算灯泡寿命的统计概率：$p' = \frac{m}{n}$。

即 在0—500小时内，$p' = \frac{133}{200} = 0.665$；

在500—1000内，$p' = \frac{45}{200} = 0.225$；

在1000—1500内，$p' = \frac{15}{200} = 0.075$；

在1500—2000内，$p' = \frac{4}{200} = 0.020$；

在2000—2500内，$p' = \frac{2}{200} = 0.010$；

在2500—3000内，$p' = \frac{1}{200} = 0.005$。

我们将相应的理论概率和统计概率加以比较后发现，它们间的偏差很小。因而，可以说，灯泡发光时间服从指数分布。这种比较方法在统计学中叫分布的拟合度检验。

(4) 爱尔朗分布，记作$E_k$。前面说过，事件流可以用时间轴上的"点"表示。如果事件流是最简单流，则事件间隔序列：$T_1$，$T_2$，…，$T_i$，…是独立的服从同指数分布的随机变数。我们将要讨论的爱尔朗流，不是别的流，正是最简单流"筛选"的结果。

设时间轴$ot$上分布着最简单流(见图3.4)

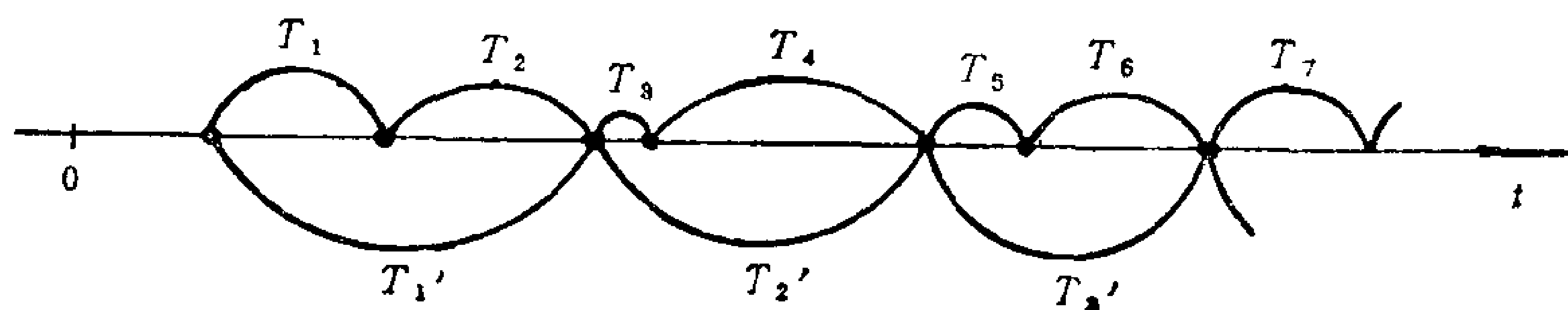



图3.4

我们每隔一个“点”连起来，组成的间隔时间$T_i$也是随机变数。这种间隔时间的分布叫二阶爱尔朗分布。或者说，在时间轴$ot$上的最简单流中，每隔一个“点”的“点”组成二阶爱尔朗流。一般，在最简单流中每隔$(k-1)$个“点”的“点”组成的流叫$k$阶爱尔朗流。

显然，最简单流是爱尔朗流的特例，即一阶爱尔朗流。

在爱尔朗流中，相邻事件间隔时间$T$表示由$k$个独立的。服从同一指数分布的事件的间隔时间之和：

$$T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k = \sum_{i=1}^{k} T_i.$$

在$T_i$中每个随机变数都服从指数分布，

即 $$f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0).$$

现在我们求$k$阶爱尔朗分布的间隔时间$T$的分布律。我们用$f_k(t)$表示它的分布密度。

设在时间轴$ot$上分布着一个最简单流，其强度为$\lambda$，相邻事件的间隔时间为$T_1$，$T_2$，…。我们求在$(t,\ t+dt)$时间内，间隔时间 $T=\sum_{i=1}^{k} T_i$的概率$f_k(t)dt$。

为此，在$t$时间内，应有最简单流的$(k-1)$个“点”；这种事件的概率可按公式(3.5)计算(见图3.5)

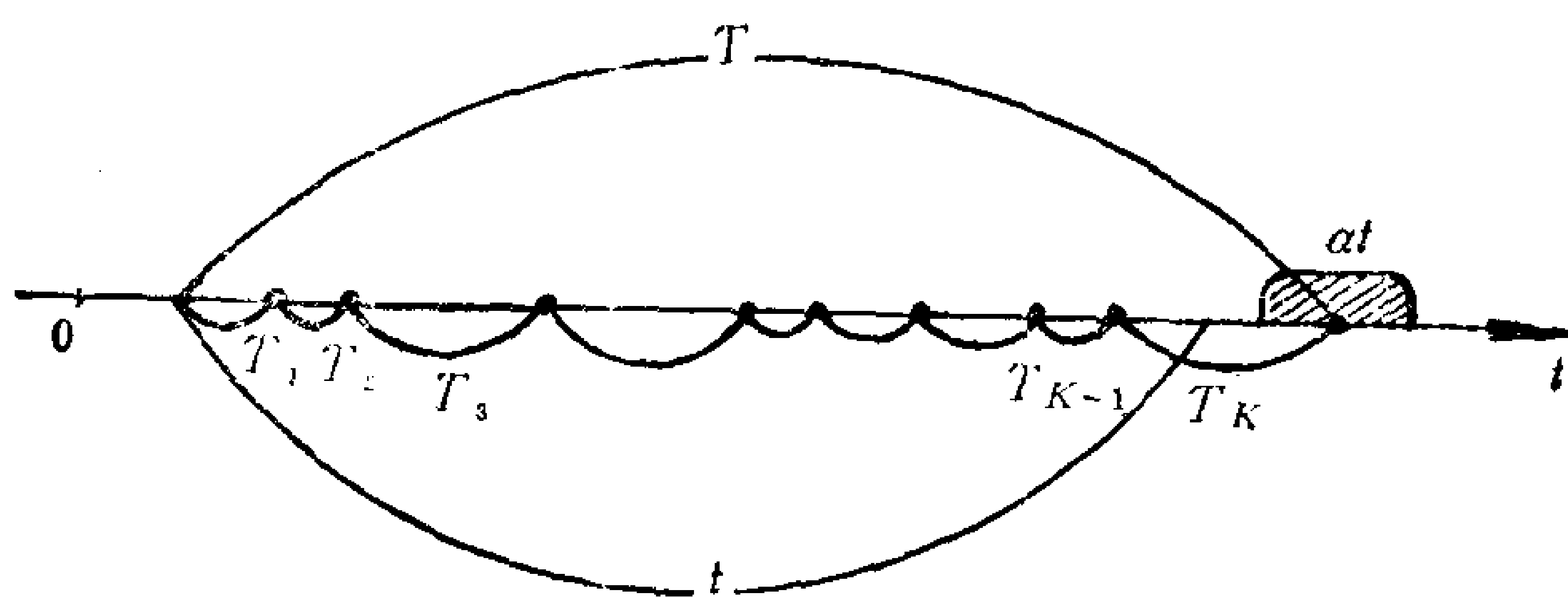



图3.5

$$p_{k-1}=\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}.$$

此外，第$k$个点应该落在$(t,\ t+dt)$内，其概率等于$\lambda dt$(见公式3.16)。这些概率相乘后得：

$$f_k(t)dt=\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\lambda dt,$$

从而 $$f_k(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}\quad(t>0). \tag{3.18}$$

显然，当$k=1$时，为一般的指数分布：

$$f_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}\qquad(t>0)$$

现在我们求$k$阶爱尔朗流的特征数：数学期望$m_t^{(k)}$和方差$D_t^{(k)}$. $k$阶爱尔朗分布的随机变数$T$是由 $k$ 个独立的随机变数相加获得的：

$$T=\sum_{i=1}^{k}T_i.$$

在$T_i$中每个随机变数都服从同一指数分布，其数学期望为$\frac{1}{\lambda}$，方差为$\frac{1}{\lambda^2}$（见公式(3.12)和(3.13))。运用数学期望和方差的加法定理，我们有：

$$m_t^{(k)}=\frac{k}{\lambda},\quad D_t^{(k)}=\frac{k}{\lambda^2}. \tag{3.19}$$

根据随机变数均方差的定义，有：

$$\sigma_t^{(k)}=\frac{\sqrt{k}}{\lambda}. \tag{3.20}$$

至此，我们求到了$k$阶爱尔朗分布的数学期望,方差和均方差.

现在我们求$k$阶爱尔朗分布的偏离系数，根据定义，有：

$$v_t^{(k)}=\frac{\sigma_t^{(k)}}{m_t^{(k)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{3.21}$$

读者注意到，我们计算$f_k(t)$和$k$阶爱尔朗分布的特征数时，我们用的强度，不是爱尔朗流的强度，而是最简单流的强度。现在用爱尔朗流的强度表示，记作$\Lambda_k$。显然，

$$\Lambda_k=\frac{\lambda}{k};\ \lambda=k\Lambda_k.$$

这是因为在具有强度为$\lambda$的最简单流中取$k$个部分的结果。我们用$\Lambda_k$代入公式(3.18)得：

$$f_k(t)=\frac{k\Lambda_k(k\Lambda_k t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\Lambda_k t}$$

或 $$f_k(t)=\frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-k\Lambda_k t}\quad (t>0). \qquad (3.22)$$

$k$阶爱尔朗分布的数学期望，方差和均方差为：

$$m_t^{(k)}=\frac{1}{\Lambda_k};\ D_t^{(k)}=\frac{1}{k\Lambda_k^2};\ \sigma_t^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k}. \qquad (3.23)$$

现在我们设强度$\Lambda_k$是不变的：

$$\Lambda_k=\Lambda=\mathrm{const},$$

我们只变化爱尔朗的阶数$k$。它的数学期望仍然不变：

$$m_t=\frac{1}{\Lambda}, \qquad (3.24)$$

但其方差和均方差将是变更的。

$$D_t^{(k)}=\frac{1}{k\Lambda^2};\quad \sigma_t^{(k)}=\frac{1}{\sqrt{k}\Lambda}. \qquad (3.25)$$

由公式(3.25)可见，当$k\to\infty$时，方差和均方差趋近于零。这表明什么呢？即，当$k\to\infty$时，具有强度$\Lambda$的爱尔朗流无限接近调整流。这时，事件的间隔时间固定不变：

$$T=\mathrm{const}=\frac{1}{\Lambda}.$$

这个性质，在实际应用中，非常方便：根据不同的$k$值，可

以度量事件流的不同程度的后效性。即，当$k=1$时，事件流无后效性，但当$k=\infty$时，事件流的后效性最大。在排队论中，不是直接用$k$值，而是根据下式，

$$v_t=\frac{\sigma_t}{m_t}=\frac{1}{\sqrt{k}} \tag{3.26}$$

中的$v_t$值应用。当$k=1$时，$v_t=1$，随着$k$的增加$v_t$减少，当$k=\infty$时，$v_t=0$。或者说，不同的$v_t$表示不同阶数的爱尔朗流。

**例题3.7** 汽车到达铁道学院站的平均间隔时间为2分钟，均方差为0.9分钟。试求爱尔朗流的强度和爱尔朗流的阶数$k$。

**解** 据题意，$\lambda=\frac{1}{\bar{t}}=\frac{1}{2}=0.5$次/分钟，

$$v_t=\frac{\sigma_t}{\bar{t}}=\frac{0.9}{2}=0.45。$$

根据公式(3.26) $v_t=\frac{1}{\sqrt{k}}$，

或 $v_t^2=\frac{1}{k}$，即 $k=\frac{1}{v_t^2}=\frac{1}{0.45^2}=4.936\approx5$。

因为爱尔朗阶数只取正整数，所以汽车到站近似于5阶爱尔朗流，其分布密度为：

$$f_5(t)=\frac{(5\times0.5)^5}{4!}t^4e^{-5\times0.5t}$$

或 $f_5(t)=4.1t^4e^{-2.5t}$ $(t>0)$。

上式的分布曲线如图(3.6)所示。

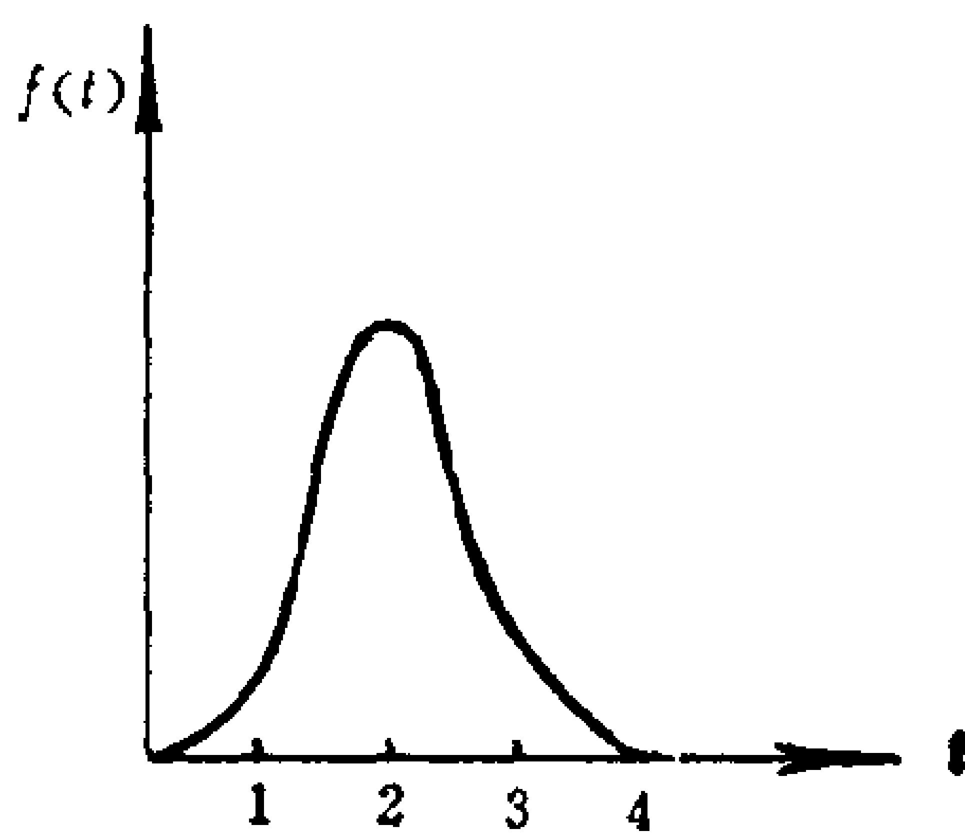


图3.6

(5) 广义爱尔朗分布。至此，我们讨论的流，只有一个参数 $\lambda$。下面我们讨论事件发生的间隔是几个独立的随机变数之和，它们都服从指数分布，但有不同的参数$\lambda_i$。这就是广义爱尔朗分布。广义爱尔朗分布密度函数为

$$f(t)=\prod_{i=1}^{k}\lambda_i \sum_{j=1}^{k}\frac{e^{-\lambda_j t}}{\prod_{i\neq j}^{k}(\lambda_j-\lambda_i)}. \tag{3.27}$$

实际应用中，经常遇到的只是$k=2$。这时，

$$f(t)=\lambda_1\cdot\lambda_2\frac{e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}. \tag{3.28}$$

广义爱尔朗流的强度为

$$\lambda=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{3.29}$$

为直观起见，我们把指数分布，爱尔朗分布和广义爱尔朗分布在时间轴$ot$上表示出来（见图3.7）。

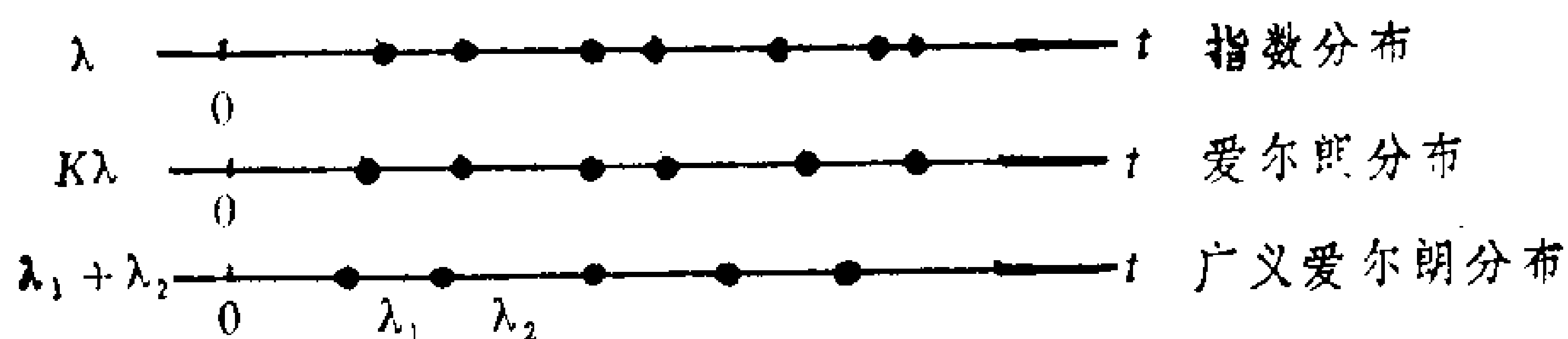



图3.7

在确定$\lambda_1$和$\lambda_2$时，我们运用随机变数的两个性质：两个独立的随机变数和的数学期望等于各个随机变数的数学期望之和。即

$$M(T)=M(T_1)+M(T_2). \tag{3.30}$$

令 $M(T)=\frac{1}{\lambda}$； $M(T_1)=\frac{k}{\lambda_1}$； $M(T_2)=\frac{1}{\lambda_2}$

所以，(3.30)式为：

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{k}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$$

或 $$\lambda_1=\frac{k\lambda\lambda_2}{\lambda_2-\lambda}. \tag{3.31}$$

根据随机变数方差的性质：两个相互独立的随机变数$T_1$和

$T_2$，它们各自的方差$D(T_1)$和$D(T_2)$之和等于$(T_1+T_2)$的方差。即

$$D(T_1+T_2)=D(T_1)+D(T_2).$$

令 $T_1+T_2=T$； $D(T_1)=\frac{k}{\lambda_1^2}$； $D(T_2)=\frac{1}{\lambda_2^2}$。

则
$$D(T)=\frac{k}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}. \tag{3.32}$$

因此，广义爱尔朗流的均方差为：

$$\sigma(T)=\sqrt{\frac{k}{\lambda_1^2}+\frac{1}{\lambda_2^2}}=\frac{1}{\lambda_1\cdot\lambda_2}\sqrt{k\lambda_2^2+\lambda_1^2}. \tag{3.33}$$

广义爱尔朗流的偏离系数为：

$$v(T)=\frac{\sigma(T)}{M(T)}=\frac{\sqrt{k\lambda_2^2+\lambda_1^2}}{\lambda_1\cdot\lambda_2}\lambda. \tag{3.34}$$

或
$$v^2(T)=\frac{k\lambda_2^2+\lambda_1^2}{\lambda_1^2\cdot\lambda_2^2}\cdot\lambda^2.$$

移项，整理后得：

$$\lambda_1=\lambda\cdot\lambda_2\sqrt{\frac{k}{\lambda_2^2v^2(T)-\lambda^2}}. \tag{3.35}$$

公式(3.31)应等价于公式(3.35)。即

$$\frac{k\lambda\lambda_2}{\lambda_2-\lambda}=\lambda\cdot\lambda_2\sqrt{\frac{k}{\lambda_2^2\cdot v^2(T)-\lambda^2}}.$$

化简、整理后得

$$\lambda_1=\frac{\lambda[k-\sqrt{1-(1+k)[1-kv^2(T)]}\,]}{1-v^2(T)}.$$

同理可得

$$\lambda_2=\frac{\lambda[k+\sqrt{1-(1+k)[1-kv^2(T)]}]}{1-v^2(T)}.$$

当$k=1$时，

$$\lambda_1=\frac{\lambda[1-\sqrt{1-2[1-v^2(T)]}]}{1-v^2(T)},\tag{3.36}$$

$$\lambda_2=\frac{\lambda[1+\sqrt{1-2[1-v^2(T)]}]}{1-v^2(T)}.\tag{3.37}$$

我们作如下讨论：

当$v(T)=0.71$时，$\lambda_1=\frac{\lambda}{0.5}$，$\lambda_2=\frac{\lambda}{0.5}$；即$\lambda_1=\lambda_2$；

当$v(T)=1$时，$\lambda_1$和$\lambda_2$没有意义；

当$v(T)<1$时，$\lambda_1$和$\lambda_2$有意义；

当$v(T)<0.71$时，$\lambda_1$和$\lambda_2$没有正根。

因而，$0.71\leqslant v(T)<1$。即实际流的偏离系数在(0.71～1)之间时，可以假设为广义爱尔朗流。是否真实，可以用假设检验验证。

(6) 超指数分布。单一事件重复发生，其间隔时间服从指数分布，但它们的参数不同，如$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_k$，且它们有相应的概率$a_1$，$a_2$，…，$a_k$。这些事件也满足正则条件

$$\sum_{i=1}^{k}a_i=1.$$

这种流的间隔时间的分布叫超指数分布。

超指数分布的密度函数为

$$f(t)=a_1\lambda_1e^{-\lambda_1 t}+a_2\lambda_2e^{-\lambda_2 t}+\cdots+a_k\lambda_ke^{-\lambda_k t}.\tag{3.38}$$

这时，间隔时间$t$的数学期望为

$$M(t)=\sum_{1}^{k}\frac{a_i}{\lambda_i}.$$

在实际应用中，只取两个参数，其概率密度为

$$f(t)=2\varphi^2\lambda e^{-2\varphi\lambda t}+2(1-\varphi)^2\lambda e^{-2(1-\varphi)\lambda t}.\tag{3.39}$$

式中　　$0<\varphi<\frac{1}{2}$。这里$\varphi$相当$a_1$，而$(1-\varphi)$相当$a_2$；$2\varphi\lambda$相当$\lambda_1$，而$2(1-\varphi)\lambda$相当$\lambda_2$。

间隔时间$t$的数学期望：$M(t)=\frac{1}{\lambda}$。

均方差为　$\sigma(t)=\frac{1}{\lambda}\sqrt{1+\frac{(1-2\varphi)^2}{2\varphi(1-\varphi)}}$，

偏离系数　$v(t)=\sqrt{1+\frac{(1-2\varphi)^2}{2\varphi(1-\varphi)}}>1$。　　(3.40)

即当$v(t)>1$时，可以考虑为超指数分布。

(7) 正态分布．实际工作中，经常遇到大量独立的随机变数组成的综合随机变数．由于每个微小的随机变数的方差与综合的随机变数的方差相比较是小到微不足道的；同时，这些微小的随机变数的分布律又是难以确定的。这时，就可以用正态分布来描述．正态分布还可以代替其它分布。例如，高阶爱尔朗分布。

所谓正态分布，其概率密度分布曲线如钟形(见图3.8)。

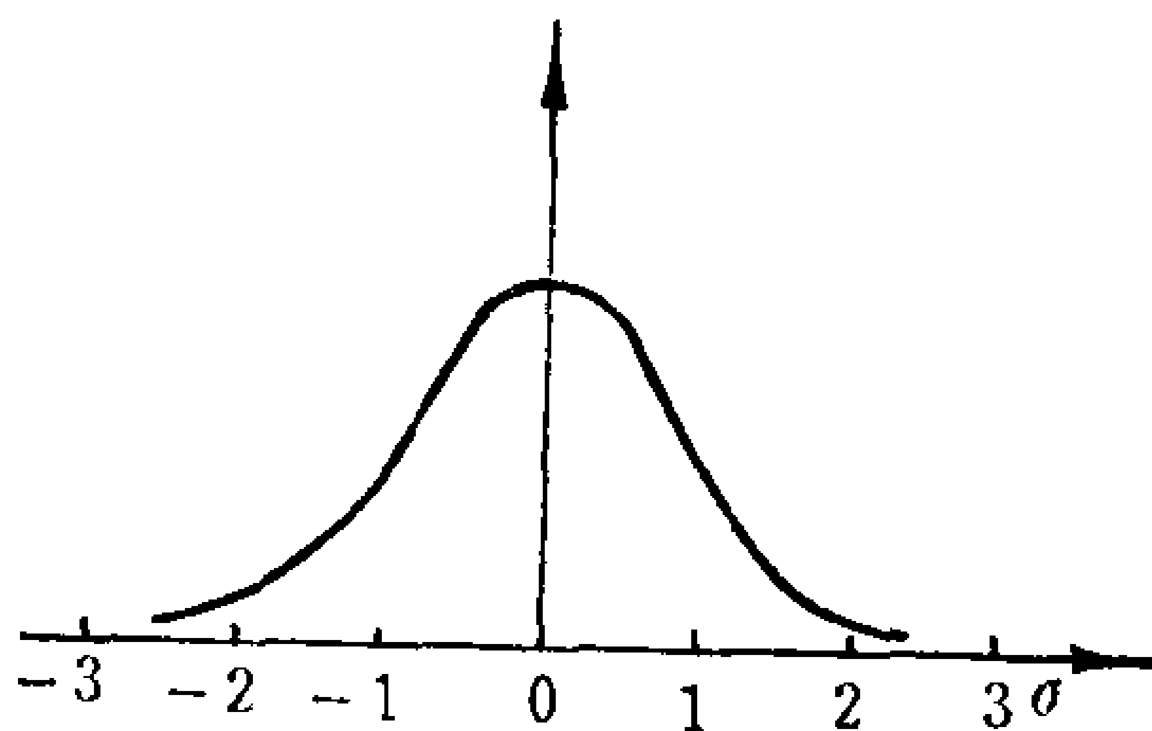


图3.8

正态分布有一个最高点，由此向两侧均衡下降，即有相等的概率．正态分布有两个参数：数学期望$a$和方差$\sigma^2$．$a$表示分布密度曲线的重心，均方差表示偏离平均值的数值．并表明曲线胖、瘦的程度。

正态分布密度为

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}.\qquad(3.41)$$

正态分布函数为

$$F(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \tag{3.42}$$

现在求正态分布的数字特征：

(a) 数学期望

$$M(t)=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

设$\frac{t-a}{\sigma}=Z$，则$t=\sigma Z+a$，$dt=\sigma dZ$

$$\therefore \quad M(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2\sigma}}dz$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\times\sqrt{2\pi}=a,$$

或 $$M(t)=a. \tag{3.43}$$

b) 正态分布的方差

$$D(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[t-M(t)]^2e^{-\frac{[t-M(t)]^2}{2\sigma^2}}dt$$

令$\frac{t-M(t)}{\sigma\sqrt{2}}=x$，则

$$D(t)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot e^{-x^2}dx.$$

分部积分后，得

$$D(t)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x2xe^{-x^2}dx$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left\{-xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx.\right.$$

当$x\to\infty$时，$e^{-x^2}$更快地下降。

$$\therefore \quad xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0。$$

故
$$D(t)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2,$$

或
$$D(t)=\sigma^2 \tag{3.44}$$

当正态分布的$a=0$时，离散中心在座标原点．由于分布密度曲线和横座标所夹的面积都等于1，所以，$\sigma$越大，图形越胖(见图3.9)。

现在求给定区间$(\alpha,\ \beta)$时正态分布的概率。

$$p(\alpha<x<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{3.45}$$

令 $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$，则$x=\sigma z+a$，$dx=\sigma dz$。

当$x=\alpha$时，$z=\dfrac{\alpha-a}{\sigma}$；

当$x=\beta$时，$z=\dfrac{\beta-a}{\sigma}$；

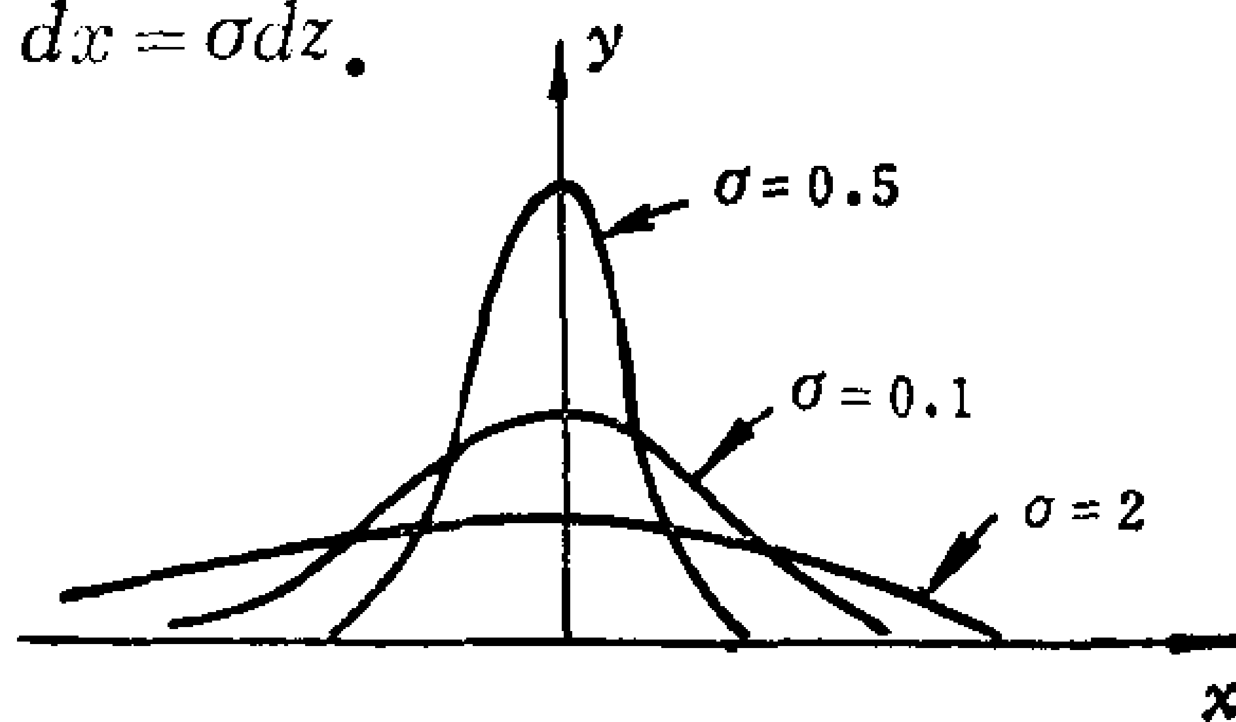



图3.9

因而
$$p(\alpha<x<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

因为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$为拉普拉斯函数$\phi(x)$，

所以 $$p(\alpha<x<\beta)=\phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (3.46)$$

**例题3.8** 从离散中心起，顺次分成三个部分，使每部分的长度为$\sigma$，试确定随机变数落在每个$\sigma$区域内的概率。

**解** 根据公式(3.46)，

$p(m\leqslant x\leqslant m+\sigma)=\phi(1)-\phi(0)$。$\phi(1)$和$\phi(0)$查拉普拉斯函数表（见附录1）得：$\phi(0)=0$，$\phi(1)=0.3413$。

$\therefore$ $p(\alpha<x<\beta)=0.3413-0=0.3413$。

同理可求$p(m\leqslant x\leqslant m+2\sigma)=\phi(2)-\phi(1)=0.1359$，

$p(m\leqslant x\leqslant m+3\sigma)=\phi(3)-\phi(2)=0.0214$。

而 $0.3413+0.1395+0.0214=0.50$。

**例题3.9** 铁路编组站编组场上，车列集结周期是随机变数，它服从正态分布。如果平均集结周期$\bar{t}=6$小时，均方差$\sigma_t=1$小时。试求车列集结时间在4～7小时的概率。

**解** $$p(4<x<7)=\phi\left(\frac{7-6}{1}\right)-\phi\left(\frac{4-6}{1}\right)$$
$$=\phi(1)-\phi(-2)=\phi(1)+\phi(2).$$

查附录1得$\phi(1)=0.341$，$\phi(2)=0.477$，

$\therefore$ $p(4<x<7)=0.341+0.477=0.818$。

即车列集结时间在4～7小时间的概率达82%。

## §3 服务时间

排队服务过程有两个重要组成部分：顾客流和服务时间。服务时间实际上就是服务系统本身的能力。服务时间记作$t_{服}$。它可能是随机的，也可能不是随机的。当然，一般说，随机者

居多。$t_{服}$ 的分布函数用$G(t)$表示。

$$G(t)=P(t_{服}<t)。$$

如果服务时间的分布密度存在，则为

$$G'(t)=g(t)。$$

当$t_{服}$呈指数分布时，

$$g(t)=\mu e^{-\mu t}(t>0)。 \tag{3.47}$$

式中　$\mu$——单位时间内，系统能够服务的顾客平均数。

$$\therefore \quad \bar{t}_{服}=\int_0^\infty t dG(t)=\Big[-te^{-\mu t}\Big]_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\mu t}dt$$

$$=0-\frac{1}{\mu}[e^{-\mu t}]_0^\infty=\frac{1}{\mu}.$$

即

$$\bar{t}_{服}=\frac{1}{\mu}. \tag{3.48}$$

公式(3.48)表示平均服务时间。

当服务时间为指数分布时，实际上，可以这样叙述：如果在某个时刻$t$，顾客已被服务了一段时间的条件下，其余服务时间的条件分布律，仍为指数分布。即它的条件分布不取决于已经服务了多少时间。或者说，无后效性。

现在我们证明这一点。

设 $P(t_{服}<t)=1-e^{-\lambda t}$或 $P(t_{服}\geqslant t)=e^{-\lambda t}$，$t\geqslant 0$。即服务时间为指数分布，现在求已经服务了一段时间的条件下，剩余的服务时间仍为指数分布。即服务时间为$x$的条件下，剩余服务时间超过$t$的条件概率。

$$\{P(t_{服}\geqslant x+t\,|\,t_{服}>x\}$$

$$=\frac{P(t_{服}\geqslant x+t,\ t_{服}\geqslant t)}{P(t_{服}\geqslant x)}$$

$$=\frac{P\{t_{服}\geqslant x+t\}}{P\{t_{服}\geqslant x\}}=\frac{e^{-\lambda}(x+t)}{e^{-\lambda x}}$$

$$=e^{-\lambda t}(t\geqslant 0),$$

即与$t_{服}$同分布。

在一定条件下，服务时间的分布律对排队系统的通过能力影响不大(一般用平均服务时间)。所以在排队论中经常把服务时间看作指数分布，这样将大大简化数学模型，并容易得到系统通过能力的计算公式。

**例题3.10** 服务时间函数为

$$G(t)=1-\frac{1}{(1+t)^2},\quad (0\leqslant t<\infty).$$

求服务时间不超过10分钟的概率。

**解** 对$G(t)$进行一次微分，得

$$G'(t)=\frac{2}{(1+t)^3}>0,$$

$$\therefore\quad G(10)=1-\frac{1}{(1+10)^3}=0.99.$$

对每个顾客的平均服务时间

$$\bar{t}_{服}=\int_0^\infty t dG(t)=\int_0^\infty\frac{2dt}{(1+t)^3}=2\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t)^3}.$$

令$z=1+t$，$dt=dz$，积分从1—∞；

$$\bar{t}_{服}=2\int_1^\infty\frac{dz}{z^3}=2\left[\frac{-1}{2z^2}\right]_1^\infty=2\times\frac{1}{2}=1(分钟).$$

$$G(1)=1-\frac{1}{(1+1)^2}=1-\frac{1}{4}=0.75.$$

计算表明，在这样的服务时间分布条件下，100个顾客中，有75个顾客的服务时间不超过1分钟。

服务时间不超过10分钟的概率为0.99。

我们讨论事件流的目的是确定常用的理论分布之间的关系，找到它们的数学期望、均方差和偏离系数。根据$v_t$，假设各种理论分布。便于读者醒目，汇总于表(3.2)

大家知道，实际流和理论流之间总是有差别的。如果误差

超过允许范围，实际流就不能用假设的理论流描述。本章根据 $v_t$ 假设的理论分布是否符合，必须进行适度检验。这就是我们将在下一章讨论的问题。

表3.2

| 分布名称 | 概率密度 $f(t)$ | 偏离系数 $v_t$ |
|---|---|---|
| 超指数分布 | $f(t)=a_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+a_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ | $v_t>1$ |
| 指数分布 | $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ | $v_t=1$ |
| 广义爱尔朗分布 | $f(t)=\lambda_1\lambda_2\dfrac{e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}$ | $0.71<v_t<1$ |
| 爱尔朗分布 | $f(t)=\dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$ | $0<v_t<1$ |
| 正态分布 | $f(t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\delta^2}}$ | $0<v_t$ |
| 定长分布 | $f(t)=\sigma(t-t_0)$ | $v_t=0$ |

# 第四章　事件流的统计分布

工程技术人员、企业管理人员对所研究的对象应经常进行观测和统计.根据实验数据描述顾客流和服务时间的概率规律，发现存在的问题，对服务质量及时作出估计，有根据地提出改善措施.

观测记录的数据往往是杂乱的数字堆砌,但在大量数据中，经过科学的加工整理，可以得到有效的信息.

本章主要介绍有关数理统计的基本概念：数据的搜集和整理的基本方法，使读者了解观测记录的数据为什么要整理和怎样整理.学会给实际的顾客流和服务时间的分布律作出科学的假说，以便进行适度检验.

## §1　基本概念

顾客到达间隔时间和服务时间的随机性往往以不同的数据显示出来.例如，列车到站间隔时间，如表(4.1)所列.列车到达间隔是总体.每个到达间隔时间是个体.显然,研究的对象改变，总体和个体也随之改变.例如，我们研究卸船时间时，卸船时间是总体，每次卸船时间是个体.列车到达间隔时间或卸船时间总是有限的.但有时为研究方便，常把相同条件下所有可能的全体看成一个总体.顾客到达间隔时间和服务时间是连续型的随机变数，所以我们只能抽取一部分数据，这部分数据

列车到达间隔时间表 4.1（以分为单位）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 43 | 36 | 63 | 23 | 4 |
| 112 | 29 | 41 | 43 | 31 | 29 |
| 69 | 57 | 36 | 43 | 14 | 11 |
| 18 | 77 | 81 | 47 | 12 | 43 |
| 44 | 16 | 80 | 6 | 52 | 5 |
| 5 | 6 | 21 | 43 | 44 | 41 |
| | | | | | 46 |

表4.2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 12 | 29 | 43 | 44 | 59 |
| 5 | 14 | 29 | 43 | 46 | 63 |
| 5 | 16 | 31 | 43 | 47 | 69 |
| 6 | 18 | 36 | 43 | 51 | 77 |
| 6 | 21 | 36 | 43 | 52 | 80 |
| 11 | 23 | 41 | 44 | 57 | 81 |
| | | | | | 112 |

叫做总体的样本。样本中所含个体的数目叫样本容量或样本的大小。例如，列车到达间隔时间的样本由37个数据（个体）组成。统计的目的是根据样本对总体规律作出某种推断。自然这种结果很难做到完全精确和可靠，但是我们可以采取一定的方法，把得到的数据加以科学的整理，获得比较精确而且具有一定可靠性的推断。把统计一个数据看作一次随机试验的结果。如果总体中每一个个体被抽到的机会是均等的，且在抽取一个个体后，总体的成分并不改变，这种样本就能很好地反映总体的情况。这种抽样叫简单随机抽样。抽得的一些个体叫样本观察值。表(4.1) 是随机抽样的结果。它是一堆数字，或者说，它是列车到达间隔这个总体的一组样本观察值。从表(4.1) 中看不出什么规律。如果把这些数值($x_i$) 由小到大的顺序排列为

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$$

即表(4.1)成为表(4.2)这种按大小顺序排列的数值叫做统计分布序列．从分布序列中可以看到，两边端点的数值是样本容量的最大值和最小值．排列在分布序列正中间的数叫中位数．当样本的个体为偶数时，正中间的数有两个，这时，中位数等于这两个数的算术平均值．中位数表示样本总体的平均水平．在统计分布序列中，若 $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$，则不大于$x$的观察值的相对频率为$\frac{k}{n}$．因而，样本分布函数为

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_1; \\ \frac{k}{n}, & x_k<x<x_{k+1}; \\ 1, & x_n \leqslant x.\end{cases}$$

我们称 $F_n(x)$ 为样本分布函数或统计分布函数．样本分布函数的图形叫累积频率曲线，它是跳跃式地上升的一条阶梯形曲线．

所谓样本分布函数 $F_n(x)$ 就是给定容量为 $n$ 的样本中随机变数取值小于$x$的频率函数．由于随机变数取值小于$x$，在事实上有一定的概率$P\{X<x\}=F(x)$．顾客到达间隔时间和服务时间是无穷的．随机统计 $n$ 次中，有$k$次小于$x$，同时有$n-k$次大于或等于$x$，其概率可用二项分布表示：$P_n(k)=C_n^k P^k q^{n-k}$．根据贝努里定理，当 $n$ 很大时，频率$\frac{k}{n}$能够给出概率$P_n(k)$ 的近似值．或者说，对于每个$x$值，当$n$足够大时，样本分布函数$F_n(x)$都能近似地给出总体分布函数值 $F(x)$．因此，可以认为，当$n$无限增大时，样本分布函数能够给出总体分布函数的近似值．

## §2 统计分布的数字特征

上面讨论了分布函数能够完整地描述随机变数的统计特

征．但在实际工作中，有时候只需要分布函数的数字特征：样本均值、样本方差和样本均方差等．现分述于后：

（1）样本均值．也叫算术平均值，记作 $\bar{x}$．设 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 为取自某个总体的，一个容量为 $n$ 的随机样本．例如，前面讨论过的列车到达间隔时间（见表4.1）．它的平均值为：

$$\bar{x}=(4+5+5+6+6+11+12+14+16+18+21+23+29+29+31+36+36+41+43+43+43+43+43+44+44+46+47+51+52+57+59+63+69+77+80+81+112)\div 37$$

$$=1440\div 37=38.9(\text{分钟})。$$

即列车平均到达间隔时间为38.9分钟．

又如，某港资料：载重量6000吨的货船，其实际载重量和卸船时间列于表4.3．

表4.3

| 货船编号 | 实际载重量（吨） | 卸船时间 起 | 卸船时间 止 | 实际卸船时间（时） | 卸船时间的平方 |
|---|---|---|---|---|---|
| 201 | 506 | 7月19日12时 | 20日12时 | 24 | 576 |
| 201 | 550 | 8月6日7时 | 6日21时 | 14 | 196 |
| 204 | 475 | 8月4日13时 | 5日10时 | 21 | 441 |
| 238 | 500 | 8月9日8时 | 10日4时 | 20 | 400 |
| 242 | 490 | 8月13日5时 | 13日23时 | 18 | 324 |
| 238 | 452 | 9月3日19时 | 4日6时 | 11 | 121 |
| 204 | 558 | 10月18日3时 | 19日1时 | 12 | 484 |

平均卸船时间为

$$\bar{x}=(24+14+21+20+18+11+12)\div 7=18.8(\text{小时})。$$

样本均值往往不能完全反映样本分布的特征．例如，按列车平均到达间隔时间计算得到的运输设备数量和实际需要量有

一定出入。这是因为没有考虑列车到达时间的波动会降低设备的有效能力。再以卸船时间为例，平均卸船时间为18.8小时。即使这个数字能符合规定要求，但由于卸船时间波动太大，在制订工作计划时，还是不方便的。因此，数据波动的大小也是一个重要指标。如何测量波动的大小呢？有两种方法：(1) 极差法。即统计分布的两个端点值之差，即

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

以列车到达间隔时间为例，

$$R = 112 - 4 = 108\text{分钟}.$$

即列车到达间隔时间的波动达108分钟之多。

由于极差法没有充分利用数据提供的信息，所以反映实际情况的精确度较差。于是产生了第二种方法——标准差法。即

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i}. \qquad (4.1)$$

式中 $x_i$—随机变数的可能值；

$\bar{x}$—随机变数的平均值；

$f_i$—随机变数的频率；

$n$—统计次数；

∵ $f_i = \dfrac{1}{n}$，

∴ $$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \qquad (4.2)$$

或 $$\sigma_x^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2. \qquad (4.3)$$

仍以卸船时间为例，

$$\frac{\sum_i x_i^2}{n} = (576+196+441+400+324+121+484) \div 7$$

$$= 366.$$

∴ $\sigma_i^2 = 366 - 18.3^2 = 31,$

或 $\sigma_x = \sqrt{31} = 5.568.$

用标准方差衡量数据的波动比极差法精确。$\sigma_x$值越大，波动越大。反之亦然。

我们常有这样的体会：测量较大的东西时，绝对误差较大；测量较小的东西时，绝对误差较小。而极差法和标准差法都只能反映绝对波动的大小，不能考虑相对误差的大小。为此，提出特征数—偏离系数，即随机变数的均方差与平均值的比值。即

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \qquad (4.4)$$

在我们的例子中，$v_x = \frac{5.568}{18.8} = 0.302.$

实际例子表明，水路运输中，装船和卸船时间的波动很大，例如，几个港口大宗货物的卸船时间，列于表(4.4)。

**表4.4**

| 港　名 | 货物名称 | 平均卸船时间 | 标　准　差 | 偏离系数 |
|---|---|---|---|---|
| A | 木　材 | 36 | 12.1 | 0.34 |
| B | 木　材 | 29 | 10.3 | 0.36 |
| C | 盐 | 13 | 5.5 | 0.38 |
| D | 矿　石 | 25 | 11.0 | 0.44 |
| E | 煤 | 28 | 23.0 | 0.82 |
| F | 煤 | 19 | 8.6 | 0.45 |
| A | 盐 | 18 | 6.3 | 0.36 |
| B | 盐 | 35 | 10.5 | 0.31 |
| C | 木　材 | 52 | 26.0 | 0.47 |

表(4.4)中的偏离系数值说明，每次卸船时间偏离平均卸船时间在31～38%之间，卸船时间波动很大。特别是同一只船在不同的航线上，运输不同货物时，更为明显。

又如，京广铁路线上的株洲北站和陇海线上的西安东站，衔接方向车流量的波动，列于表（4.5）。表中数字告诉我们，车站各方向的车流量和车站综合车流量都有波动，但其偏离系数都在0.33以下。

表4.5

| 站名 | 衔接方向 | 每天到站列车数 | 均方差 | 偏离系数 |
|---|---|---|---|---|
| 株洲北站 | 长沙 | 22 | 2.3 | 0.105 |
| | 湘潭 | 22 | 2.6 | 0.14 |
| | 上海 | 16 | 3.0 | 0.19 |
| | 株洲 | 14 | 1.7 | 0.12 |
| | 全株北站 | 74 | 3.8 | 0.048 |
| 西安东站 | 上行 | 6 | 1.89 | 0.31 |
| | 下行 | 25 | 2.59 | 0.10 |
| | 全西安东站 | 31 | 2.80 | 0.09 |

上述分析表明，统计数据有一定的特性：

1） 波动性。在相同条件下，货物装卸时间和车流量都表现出在一定范围内的波动；

2） 规律性。数据波动不是杂乱无章的，而是呈现一定规律的。

## §3 最少统计次数

为了弄清楚数据波动的规律，必须有一定的样本容量。当然，一个总体所含的个体的数目往往是无穷的，以致不能一一

加以考察．有时候数据的测定是破坏性的．例如，研究炮弹的杀伤半径，测量一个数据就要爆破一枚炸弹．因此，即使总体所含个数不多，也不允许全部考察，我们只能通过样本了解总体．但是样本大小往往影响到总体的本来面目，所以，要有一个最小的样本容量或最少的统计次数．求解这个问题应以概率论中的中心极限定理为基础，即统计次数$N$的平均结果（频率或均值）近似于正态分布．如果在$N$次统计中，出现事件$A$的次数为$n_A$，则其频率为

$$p^* = \frac{n_A}{N}.$$

它近似于正态分布，其数学期望为

$$m_{p^*} = P. \tag{4.5}$$

它的均方差为

$$\sigma_{p^*} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}. \tag{4.6}$$

如果$N$很大，随机变数$X$的取值为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N.$$

则其算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i. \tag{4.7}$$

它近似于正态分布，具有数学期望

$$m_{\bar{x}} = m_x. \tag{4.8}$$

它的均方差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{4.9}$$

式中　$m_x$和$\sigma_x$是随机变数$X$的数学期望和均方差．

在上述分布律和计算公式的基础上，就可以讨论如下问题，在$N$次统计中，事件$A$每次发生的概率为$P$．统计结果事件$A$发

生的频率为$p^*$。我们求$|p^*-p|$不大于给定值$\varepsilon>0$的概率。考虑(4.8)(4.9)得：

$$p(|p^*-p|<\varepsilon)=2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right). \tag{4.10}$$

式中　$\phi$—拉普拉斯函数。

**例题4.1**　进行$N=1000$次独立试验。在每次试验中，事件$A$发生的概率为$P=0.3$。试求：事件$A$的频率$p^*$与其概率$P$的差小于$\varepsilon=0.02$的概率。

**解**　按公式(4.10)有：

$$p(|p^*-p|<0.02)=2\phi\left(\frac{0.02\times31.6}{0.459}\right)$$

或　$$p(|p^*-0.3|<0.02)=2\phi(1.38)\approx0.83.$$

因而，若$p$为已知，我们可以求到$p^*$需要的$N$值。问题在于$p$是未知数。但在估计统计的精度时，公式(4.10)的等号右边不需要那么精确。因而，我们取$p=p^*$。或者说，若统计次数$N$为已知值和大概的$p$值。然后，求$p^*$与$p$的差不大于$\varepsilon$的概率。因而有这样的问题。究竟应统计多少次数$N$，方可使$p^*$与$p$的差小于$\varepsilon$的概率大于或等于一定值呢？即在很多次独立试验中，事件$A$每次发生的概率为$p$，需要统计多少次$N$，方可达到足够大的概率$Q$，使$|p^*-p|<\varepsilon$？

求解这样的问题，我们使$Q$接近1。我们叫$Q$为可信水平。如果$Q$值给定，则

$$2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)=Q,$$

或　$$\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)=\frac{1}{2}Q,$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sqrt{p(1-p)}}=\phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right).$$

式中　$\phi^{-1}$—拉普拉斯的反函数。

从而，得 $N=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}\left[\phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2$.　　(4.11)

公式(4.11)计算得到的$N$值，不是整数时，就近进整。为了减少计算工作量，我们给出表(4.6)备查。

**表4.6**

| $Q$ | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 0.96 | 0.97 | 0.98 | 0.99 | 0.995 | 0.999 | 0.9999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[\phi^{-1}(\frac{1}{2}Q)]^2$ | 1.64 | 2.08 | 2.71 | 3.84 | 4.21 | 4.49 | 5.43 | 6.6[illegible] | 7.90 | 10.9 | 15.2 |

**例题4.2**　在很多次独立试验中，事件 $A$ 每次发生的概率 $p=0.2$，试问统计多少次数$N$，使可信水平 $Q=0.95$，且满足 $p^*-p<0.01$？

**解**　根据 $Q=0.95$，查表(4.6)得

$$\left[\phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2=3.84,$$

$$\therefore\qquad N=\frac{0.2\times0.8}{0.01^2}\times3.84=6140,$$

即需要实现6000次试验。

现在我们根据平均值和数学期望间的关系求最少统计次数。

设进行 $N$ 次独立试验，在每次试验中，统计得随机变数$X$的平均值为$m_x$，均方差为$\sigma_x$. 随机变数$X$的统计平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i,$$

求随机变数的$(\bar{x}-m_x)$小于给定的$\varepsilon$的概率

$$P(|\bar{x}-m_x|<\varepsilon).$$

**解**　在中心极限定理的基础上，由于$N$很大，可以考虑了服

从正态分布，并具有特征数$m_{\bar{x}}=m_x$，$\sigma_{\bar{x}}=\sigma_x/\sqrt{N}$。

从而 $$P(|\bar{x}-m_x|<\varepsilon)=2\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right),$$

或 $$P(|\bar{x}-m_x|<\varepsilon)=2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right) \tag{4.12}$$

按公式(4.12)可以用$\bar{x}$估计数学期望的精度。

**例题4.3** 进行$N=1600$次独立试验，随机变数$X$的数学期望$m_x=2$，均方差$\sigma_x=1$。试求$(\bar{x}-m_x)$的值小于0.05的概率。

**解** $$P(|\bar{x}-m_x|<0.05)=2\phi\left(\frac{0.05\times 40}{1}\right)$$
$$=2\phi(2)\approx 0.954.$$

由此可见，可以不知道随机变数的数学期望，但需要知道$\sigma_x$。才能求到$P$。

实际上，统计的$\sigma_x$可取近似值，即

$$\sigma_x\approx\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\bar{x}^2}\cdot \tag{4.13}$$

式中 $\bar{x}$—算术平均值。

如果给出可信水平$Q$，则公式(4.13)为

$$2\phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma_x}\right)=Q,$$

从而 $$N=\left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2\left[\phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2. \tag{4.14}$$

**例题4.4** 进行独立试验，其目的是确定随机变数$X$的数学期望的近似值$m_x$；它的均方差[按公式(4.13)] $\sigma_x\approx 0.1$。若可信水平$Q=0.99$，$\varepsilon=0.01$ 试问统计多少次数$N$？

**解** 按公式(4.14)

$$N=\left(\frac{\sigma_x}{\varepsilon}\right)^2\left[\phi^{-1}\left(\frac{1}{2}Q\right)\right]^2=\left(\frac{0.1}{0.01}\right)^2\times 6.61$$
$$=661\text{次}$$

即最少统计661次才能达到可信水平99%。

综上所述，最少统计次数$N$取决于：

1）要求的统计估计可靠性；

2）允许的抽样误差；

3）特征数的偏离量。

## §4 数据分组

为了能从样本大致确定统计数据在数轴上的概率分布和密度分布，需要不少的统计数据。若随机变数为离散型，则可计算样本中各个观察值的重复次数，从而得到随机变数取这些值的频率。至于连续型，由于随机变数可能取区间上的一切值，但实际统计观察次数有限，同时，实际读数的精确度也有限，

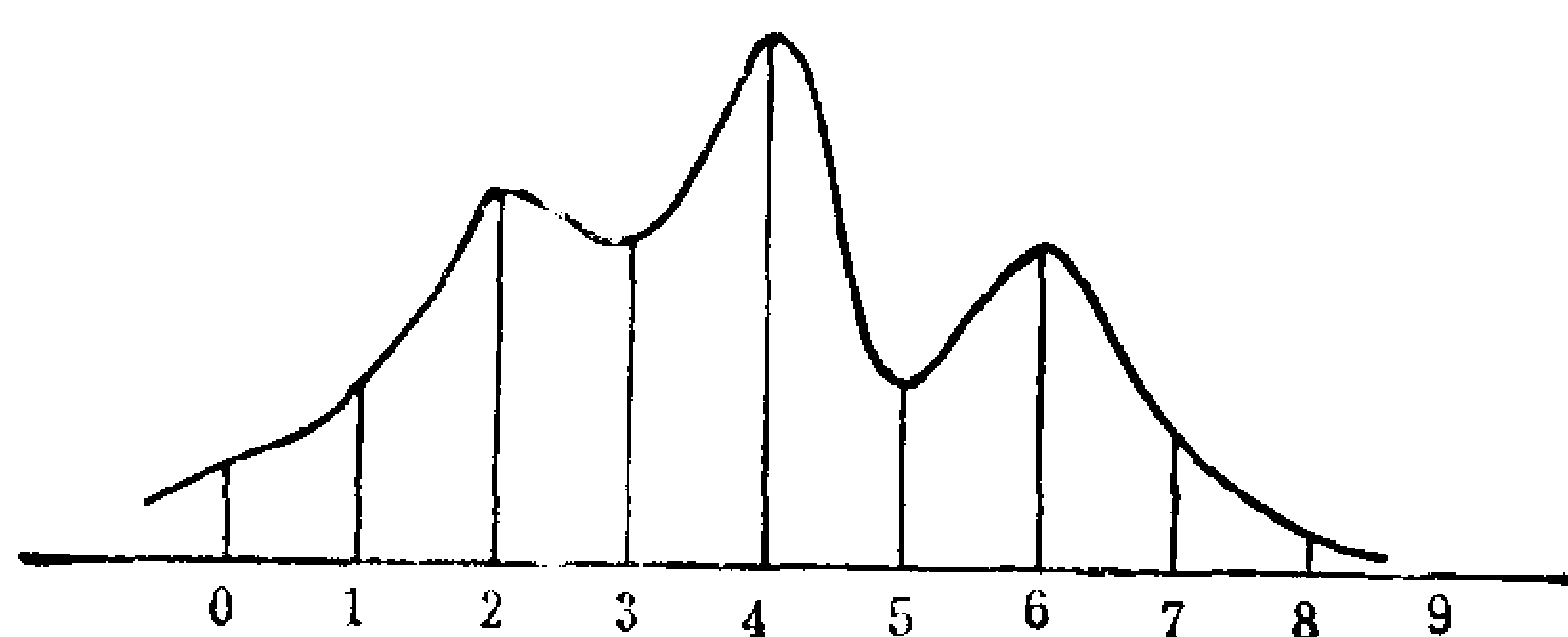



图4.1

数据，得不到综合，因而反映不出曲线的特征。

如果我们把它分成5组，确定组中值，频数和频率，一并列于表(4.7)后面4格。把它画成图（4.2）。可以很清楚地看到个别特殊的数据得到了综合，使分布曲线特征也得到了很好的反映。

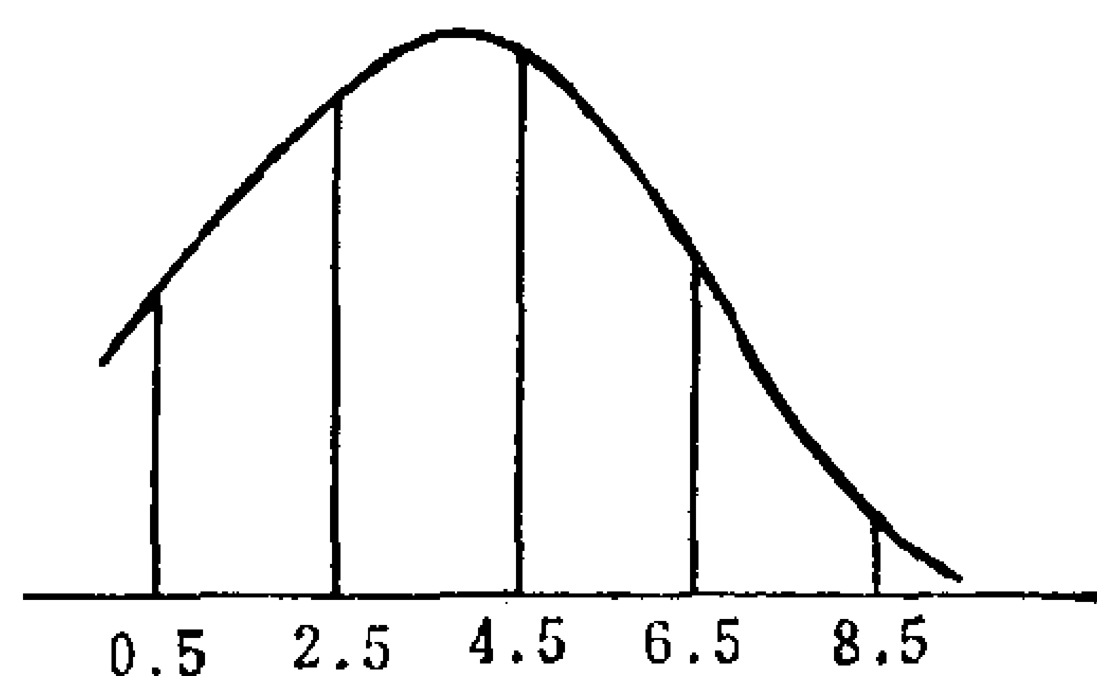



图4.2

**表4.7**

| 每天生产的次品灯泡数 | 发生的天数（频数） | 发生的频率 | 组距 | 组中值 | 频数 | 频率 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0.0645 | 0—1 | 0.5 | 5 | 0.1613 |
| 1 | 3 | 0.0968 | | | | |
| 2 | 5 | 0.1613 | 2—3 | 2.5 | 9 | 0.2903 |
| 3 | 4 | 0.1290 | | | | |
| 4 | 7 | 0.2258 | 4—5 | 4.5 | 10 | 0.3225 |
| 5 | 3 | 0.0968 | | | | |
| 6 | 4 | 0.1290 | 6—7 | 6.5 | 6 | 0.1935 |
| 7 | 2 | 0.0645 | | | | |
| 8 | 1 | 0.0322 | 8—9 | 8.5 | 1 | 0.0322 |
| 9 | 0 | 0.000 | | | | |

在确定组数时，通常，当样本容量多于100个时，分成10～20组；当样本数少于50个时，一般分成5～6组。

一般在确定分组数目时，可按下式计算。

$$k=1+3.22\log n。 \quad (4.15)$$

式中 $n$—统计次数。

log—以10作底的对数。

实际分组时，还要考虑计算的方便，进行适当调整。

有了分组的数目，根据分布序列两端点值之差就可以确定组距。即

$$i=\frac{x_{max}-x_{min}}{k}。 \quad (4.16)$$

式中，$x_{max}$，$x_{min}$——分别表示统计数据中最大和最小值。

我们仍以列车到达间隔时间为例。共统计37次，

$$\therefore \quad k=1+3.22\log 37=6。$$

$$\therefore \quad i=\frac{112-4}{6}\approx 20。$$

我们取$i=20$和$i=24$两种分组，其结果列表(4.8)如下：

表4.8

| 组　　距 | 频　　数 | 组　　距 | 频　　数 |
|---|---|---|---|
| 1～20 | 10 | 1～24 | 12 |
| 21～40 | 7 | 25～48 | 15 |
| 41～60 | 14 | 49～72 | 6 |
| 61～80 | 4 | 73～96 | 3 |
| 81～100 | 1 | 97～120 | 1 |
| 101～120 | 1 | | |
| 总　　计 | 37 | 总　　计 | 37 |

有了组距，就可数出落在每个组中的次数，用唱票的方式进行计数，或称频数。频数与样本总数之比叫频率。为了直观

地看到数据波动的规律，在横座标上标出分组的点，在纵座标上画出对应的频率。画成的图叫直方图，或称频率分布直方图。沿直方图中点描出来的曲线叫频率分布曲线。这条曲线排除了抽样和读数的误差，完全反映了波动的规律。数据的波动规律不同，则分布曲线的形状也不同。

由于统计数据的频率之和等于1，不难看出，直方图矩形面积之和等于1。或者说，分布曲线与横座标所夹的面积等于1。

必须注意：在分组计算中往往造成误差。例如，在计算列车平均到达间隔时间时，分组计算的总时间为1422.5分钟（见表4.9）。而实际的间隔时间为1440分钟。因而，在计算样本均值时可用加总计算法。

表4.9

| 组　距 | 组中值 $x_i$ | 频　数 $n_i$ | 频　率 $f_i$ | $x_i \cdot f_i$ | $x_i \cdot n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1～24 | 12.5 | 12 | 0.32 | 4.0 | 150.0 |
| 25～48 | 36.5 | 15 | 0.41 | 14.96 | 547.5 |
| 49～72 | 60.5 | 6 | 0.16 | 9.68 | 363.0 |
| 73～96 | 84.5 | 3 | 0.08 | 6.76 | 253.5 |
| 97～120 | 108.5 | 1 | 0.03 | 3.26 | 108.5 |
| 计 | | 37 | 1.00 | 38.65 | 1422.5 |

## §5　加总计算法

为了使计算迅速、正确，在计算平均值时可按下列步骤进行。

1）找出中位数．把它作为样本均值的近似值；

2）根据各组发生的次数进行迭加，其方法如表(4.10）所示；

表4.10

| 组　限 | 组中值 $x_i$ | 频　数 $n_i$ | 加总 第一次 | 加总 第二次 |
|---|---|---|---|---|
| 1～24 | 12.5 | 12 | 12 | 12 |
| 25～48 | 36.5 | 15 | 27 | $39=s_1$ |
| 49～72 | $x_k=60.5$ | 6 | | |
| 73～96 | 84.5 | 3 | 4 | $5=s_2$ |
| 97～120 | 108.5 | 1 | 1 | 1 |

3）按下式计算样本均值．

$$\bar{x}=x_k+\frac{(s_2-s_1)}{n}d. \tag{4.17}$$

式中　$x_k$—中位数．即上表中，正中间组的组中值．

$s_1, s_2$—如表中两次相加后得到的值，$s_1$是从头上加到中间组；$s_2$是自尾部加到中间组；

$d$—组距．

我们的例子中，$x_k=60.5$，$s_1=39$，$s_2=5$，$d=24$，$n=37$．

∴　$$\bar{x}=60.5+\frac{(5-39)\times 24}{37}=38.45.$$

现在我们证明公式(4.17)．由表(4.10)可见，

$$s_1=\sum_{i=1}^{k}(k-i)n_i. \tag{4.18}$$

$$s_2=\sum_{i=k+1}^{n}(i-k)n_i. \tag{4.19}$$

∵　组距为$d$．

∴　$$x_2=x_1+d$$

$$x_3=x_1+2d$$

$$\vdots$$

$$x_i = x_1 + (i-1)d$$

$$x_k = x_1 + (k-1)d$$

---

$$x_i - x_k = d(i-1+1-k) = (i-k)d,$$

即
$$(i-k) = \frac{x_i - x_k}{d}, \tag{4.20}$$

或
$$(k-i) = -\frac{x_i - x_k}{d}. \tag{4.21}$$

把(4.20)代入(4.19)；把(4.21)代入(4.18)得

$$s_1 = -\sum_{i}^{k}(x_i - x_k)n_i/d, \tag{4.22}$$

$$s_2 = \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_k)n_i/d. \tag{4.23}$$

把(4.22)(4.23)代入(4.17)得

$$\bar{x} = x_k + \left[\sum_{k+1}^{n}(x_i - x_k)n_i/d + \sum_{i=1}^{k}(x_i - x_k)n_i/d\right]/n$$

$$= x_k + \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_k)n_i\right]d/dn$$

$$= x_k + \left(\frac{\sum_i x_i n_i}{n}\right) - \frac{nx_k}{n},$$

$$\therefore \qquad \bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n}.$$

至此，公式(4.17)得证。

按加总法计算样本均值的一般形式如下表所列：

| $i$ | $x_i$ | $n_i$ | 加总 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 第一次 | 第二次 |
| 1 | $x_1$ | 1 | $n_1$ | $n_1$ |
| 2 | $x_2$ | 2 | $n_1+n_2$ | $2n_1+n_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $k-1$ | $x_{k-1}$ | $k-1$ | $n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}$ | $(k-1)n_1+(k-2)n_2+\cdots+n_{k-1}=s_1$ |
| $k$ | $x_k$ | $n_k$ | — | — |
| $k+1$ | $x_{k+1}$ | $n_{k+1}$ | $n_{k+1}+\cdots+n_{m-1}+n_m$ | $n_{k+1}+2n_{k+2}+\cdots+(m-k)n_m=s_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $m-1$ | $x_{m-1}$ | $n_{m-1}$ | $n_{m-1}+n_m$ | $n_{m-1}+2n_m$ |
| $m$ | $x_m$ | $n_m$ | $n_m$ | $n_m$ |

现在用加总法计算统计方差，即标准差。在计算时可与计算样本均值用同一张表格。先举一个例子（列车到达间隔时间）。计算过程如表所列：

| $x_i$ | $n_i$ | 加总 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 第一次 | 第二次 | 第三次 |
| 12.5 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 36.5 | 15 | 27 | $39=s_1$ | $51=s_1^*$ |
| 60.5 | 6 | | | |
| 84.5 | 3 | 4 | $5=s_2$ | $6=s_2^*$ |
| 108.5 | 1 | 1 | 1 | 1 |

这里组距 $d=24, s_1=39, s_2=5, s_1^*=51, s_2^*=6$，$n=37$。标准差可按下式计算：

$$s=d\sqrt{2(s_1^*+s_2^*)-(s_1+s_2)-nb^{*2}/(n-1)}$$
$$=24\sqrt{(114-44-37-0.84)/36}=\pm 25(\text{分})。$$

即列车到达间隔时间偏离平均到达间隔时间为±25分钟。

现在我们按下式计算：

$$s=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2 n_i/n-1}\ .$$

为此，列出计算表格：

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i-\bar{x}$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $(x_i-\bar{x})^2 n_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 12.5 | 12 | -25.9 | 670.81 | 8049.72 |
| 36.5 | 15 | 1.9 | 3.61 | 54.15 |
| 60.5 | 6 | 22.1 | 488.41 | 2936.46 |
| 84.5 | 3 | 46.1 | 2125.21 | 6375.63 |
| 108.5 | 1 | 70.1 | 4914.01 | 4914.01 |
| | $\Sigma=37$ | | | $\Sigma=22323.95$ |

$$\therefore\qquad s=\sqrt{\frac{22323.95}{37-1}}=\pm 24.90(\text{分钟}).$$

两种方法的计算误差为0.1分钟，但加总法简便易行。其数学证明可见[20]

## §6 实　　例

上面讨论了理论分布和统计分布以及它们的数字特征。下面我们用表格的形式逐步确定统计分布的数字特征。还根据偏离系数$v$，初步假定这种分布可能属那种理论分布，为下一章适度检验作准备。

**例题4.5** 某编组站改编列车到达间隔时间及其发生的次数列于表(4.15)。试求改编列车到达间隔时间的数字特征。

由表可见，列车平均到达间隔时间是15分钟；方差为157.7；均方差为12.6分。偏离系数为0.85。

**表4.15**

| 组数 | 组　距 | 组中值 $l_中$ | 发生次数 $n_i$ | 发生概率 $p_i$ | 平均数 $l_中 p_i$ | $l_中 - M(l)$ | $[l_中 - M(l)]^2$ | $[l_中 - M(l)]^2 p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0—6 | 3 | 129 | 0.247 | 0.741 | -12 | 144 | 35.568 |
| 2 | 6—12 | 9 | 143 | 0.274 | 2.466 | -6 | 36 | 9.864 |
| 3 | 12—18 | 15 | 97 | 0.177 | 2.655 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 18—24 | 21 | 60 | 0.115 | 2.415 | 6 | 36 | 4.140 |
| 5 | 24—30 | 27 | 35 | 0.067 | 1.809 | 12 | 144 | 9.648 |
| 6 | 30—36 | 33 | 21 | 0.040 | 1.320 | 18 | 324 | 12.96 |
| 7 | 36—42 | 39 | 13 | 0.025 | 0.975 | 24 | 576 | 14.40 |
| 8 | 42—48 | 45 | 8 | 0.015 | 0.675 | 30 | 900 | 13.50 |
| 9 | 48—54 | 51 | 5 | 0.009 | 0.459 | 36 | 1296 | 11.66 |
| 10 | 54—60 | 57 | 5 | 0.009 | 0.513 | 42 | 1764 | 15.876 |
| 11 | 60—66 | 63 | 4 | 0.008 | 0.504 | 48 | 2304 | 18.432 |
| 12 | 66—72 | 69 | 2 | 0.004 | 0.276 | 54 | 2916 | 11.66 |
| | | | Σ522 | | 15 | | | Σ157.7 |

根据$V=0.85$和分布曲线形状如图（4.3）所示。参照第三章广义爱尔朗分布的偏离系数$0<v<1$和分布曲线形状，可以假

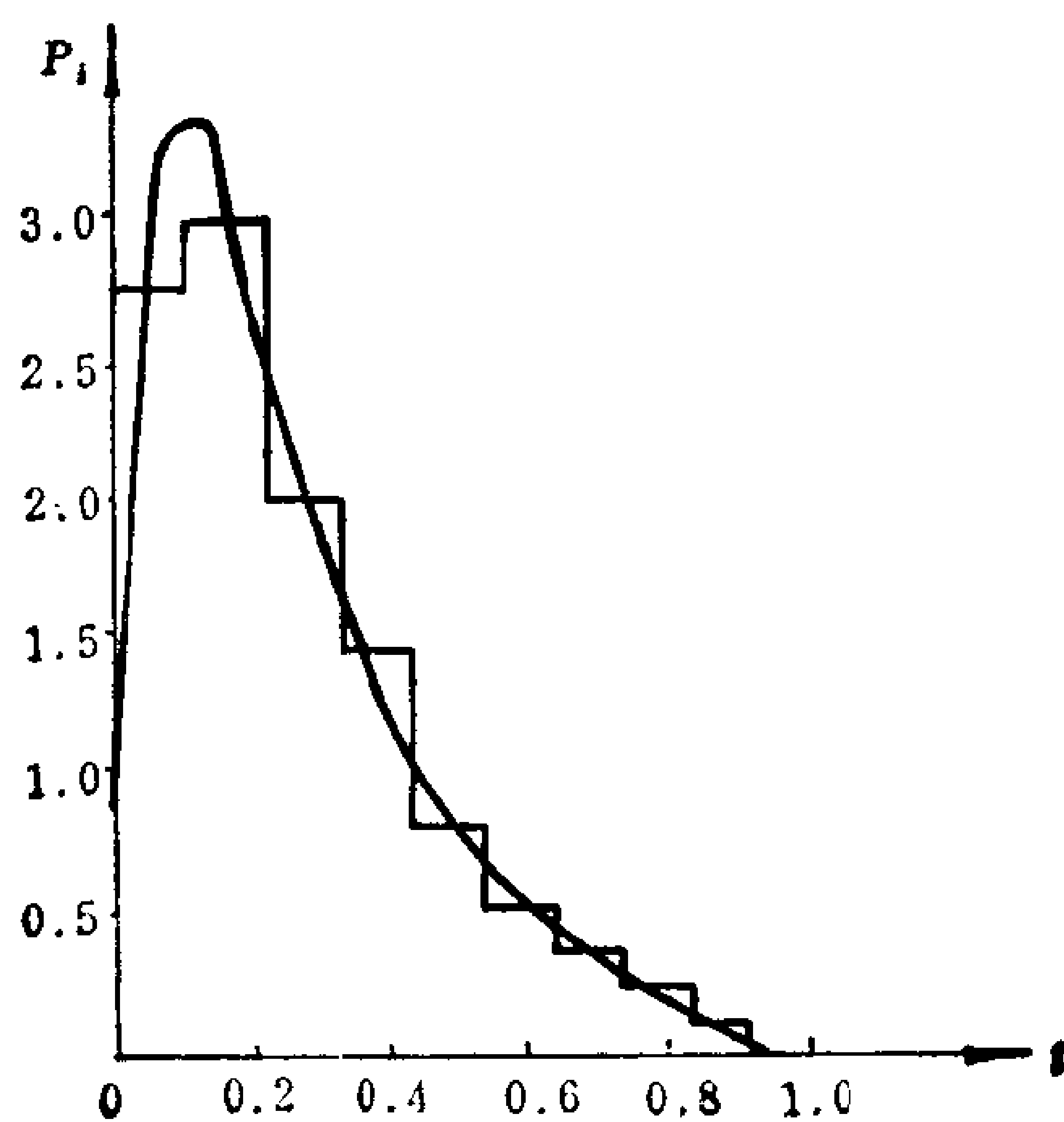



图4.3

设它服从广义爱尔朗分布。

**例题4.6** 工厂技术检验所抽查200组同类产品，其结果次品情况如下：

| 每次中次品数目 $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 发生的组数 $n_i$ | 116 | 56 | 22 | 4 | 2 |

试问次品分布是否为泊松分布。

**解** 我们用加总法求偏离系数。

**表4.17**

| $x_i$ | $n_i$ | 加 | | 总 |
|---|---|---|---|---|
| | | 116 | 116 | 116 |
| 0 | 116 | | | |
| 1 | 56 | →172 | →288 $D=s_1$ | →404 $=s_1^*$ |
| 2 | 22 | — | — | — |
| 3 | 4 | →6 | →8 $=s_2$ | →10 $=s_2^*$ |
| 4 | 2 | 2 | 2 | 2 |

$$\bar{x}=x_k+\frac{s_2-s_1}{n}d$$

$$=2+\frac{8-288}{200}=0.6,$$

$$\sigma=d\frac{\sqrt{\left[2(s_1^*+s_2^*)-(s_1+s_2)-\left(\frac{(s^2-s_1)}{n}\right)^2\right.}}{n-1}.$$

$$\sigma=\frac{\sqrt{\left[(2404+10)-(288+8)-\frac{(8-288)^2}{200^2}\right.}}{200-1}=1.6,$$

$$\therefore\quad v=\frac{1.6}{0.6}=2.7>1.$$

因为超指数分布的偏离系数大于1（见第三章）所以，次品分布服从超指数分布。

**例题4.7** 对200个电子元件进行寿命检验，其结果列于表(4.18)：

表4.18

| 电子元件寿命(100小时) | 组中值 $I_中$ | 发生次数 $n_i$ | 发生的概率 $p_i=\frac{n_i}{n}$ | 平均数 $M(I)=I_中 p_i$ | $[I_中-M(I)]^2$ | $[I_中-M(I)]^2 p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—5 | 2.5 | 133 | 0.665 | 1.6625 | 4.6225 | 3.07 |
| 5—10 | 7.5 | 45 | 0.225 | 1.6875 | 8.1225 | 1.83 |
| 10—15 | 12.5 | 15 | 0.075 | 0.9375 | 61.6225 | 4.62 |
| 15—20 | 17.5 | 4 | 0.020 | 0.0011 | 165.1225 | 3.30 |
| 20—25 | 22.5 | 2 | 0.010 | 0.225 | 318.6225 | 3.18 |
| 25—30 | 27.5 | 1 | 0.005 | 0.1375 | 522.1225 | 2.61 |
| | | Σ200 | 1.0 | Σ4.65 | | Σ18.61 |

由表(4.18)可见，电子元件的平均寿命为4.65小时；方差为18.61，均方差为$\sigma=\sqrt{18.61}=4.31$，偏离系数$v=\frac{4.31}{4.65}=0.93$(接近1)。因此，电子元件寿命分布可以假设为指数分布。

**例题4.8** 已知汽车到达货场取货的间隔时间和发生的次数列于表(4.19)。试问它可能服从何种理论分布。

表4.19

| 组数 | $x_i$ | $n_i$ | $p_i$ | $x_i p_i$ | $[x-M(x)]^2$ | $[x-M(x)]^2 p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 15 | 0.075 | 0.375 | 64 | 4.8 |
| 2 | 7 | 26 | 0.130 | 0.910 | 36 | 4.68 |
| 3 | 9 | 25 | 0.125 | 1.125 | 16 | 2.00 |
| 4 | 11 | 30 | 0.150 | 1.650 | 4 | 0.60 |
| 5 | 13 | 26 | 0.130 | 1.690 | 0 | 0.00 |
| 6 | 15 | 21 | 0.105 | 1.575 | 4 | 0.42 |
| 7 | 17 | 24 | 0.120 | 2.040 | 16 | 1.92 |
| 8 | 19 | 20 | 0.100 | 1.900 | 36 | 3.60 |
| 9 | 21 | 13 | 0.065 | 1.365 | 64 | 4.16 |
| 计 | | 200 | | $M(x)=13$ | | $D(x)=17.68$ |

**解** 我们制订计算表格，计算数字特征：

由表(4.19)可知，汽车平均到达间隔时间是13分钟，方差为17.68，均方差为$\sigma=\sqrt{17.68}=4.2$分钟，因而，到达间隔时间的偏离系数$v=\frac{4.2}{13}=0.33$。

**例题4.9** 丰台西编组站到达场，1981年9月份每天接改编列车76列到99列不等(见表4.20)。试确定丰台西站每天平均接入列车数。接车数的方差和偏离系数。

**解** 根据公式(4.15)确定组数。

$k=1+3.22\log 30\approx 5$。

组距：$i=\frac{I_{max}-I_{min}}{k}=\frac{99-76}{5}=4.6$。

为便于取组中值，我们取$i=3$。大家知道，车站每天接入的改编列车是随机变数。

**表4.20　丰西站到达场作业量数字特征计算表**

| 顺号 | 组距 | 组中值 $I_{i中}$ | 发生次数 $n_i$ | 发生概率 $p_i$ | 平均数 $M(I_i)$ | $I_{i中}-M(I)$ | $[I_{i中}-M(I)]^2$ | $[I_{i中}-M(I)]^2\times p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 76—78 | 77 | 1 | 0.033 | 2.54 | 9.5 | 90.25 | 2.98 |
| 2 | 79—81 | 80 | 4 | 0.134 | 10.72 | 6.5 | 42.25 | 5.66 |
| 3 | 82—84 | 83 | 7 | 0.233 | 19.34 | 3.5 | 12.25 | 2.85 |
| 4 | 85—87 | 86 | 6 | 0.200 | 17.20 | 0.5 | 0.25 | 0.05 |
| 5 | 88—90 | 89 | 6 | 0.200 | 17.80 | 2.5 | 6.25 | 1.25 |
| 6 | 91—93 | 92 | 3 | 0.100 | 9.20 | 5.5 | 30.25 | 3.025 |
| 7 | 94—96 | 95 | 1 | 0.033 | 3.14 | 8.5 | 72.25 | 2.38 |
| 8 | 97—99 | 98 | 2 | 0.067 | 6.57 | 11.5 | 132.25 | 8.86 |
| | 计 | | 30 | | 86.5 | | | 27.0 |

由表(4.20)可见，丰台西站每天平均接改编列车86.5列，它的方差$D=27$，均方差$\sigma=\sqrt{27}=5.2$列，偏离系数$v=\frac{5.2}{86.5}$

=0.06。

我们把丰台西站作业量波动描成频率分布曲线（见图4.4）从曲线形状来看，它近似于钟形曲线，根据这二点，我们假设车站作业量波动可能服从正态分布。究竟是不是假设的理论分布将在下一章中用$\chi^2$（读作卡平方）进行检验。

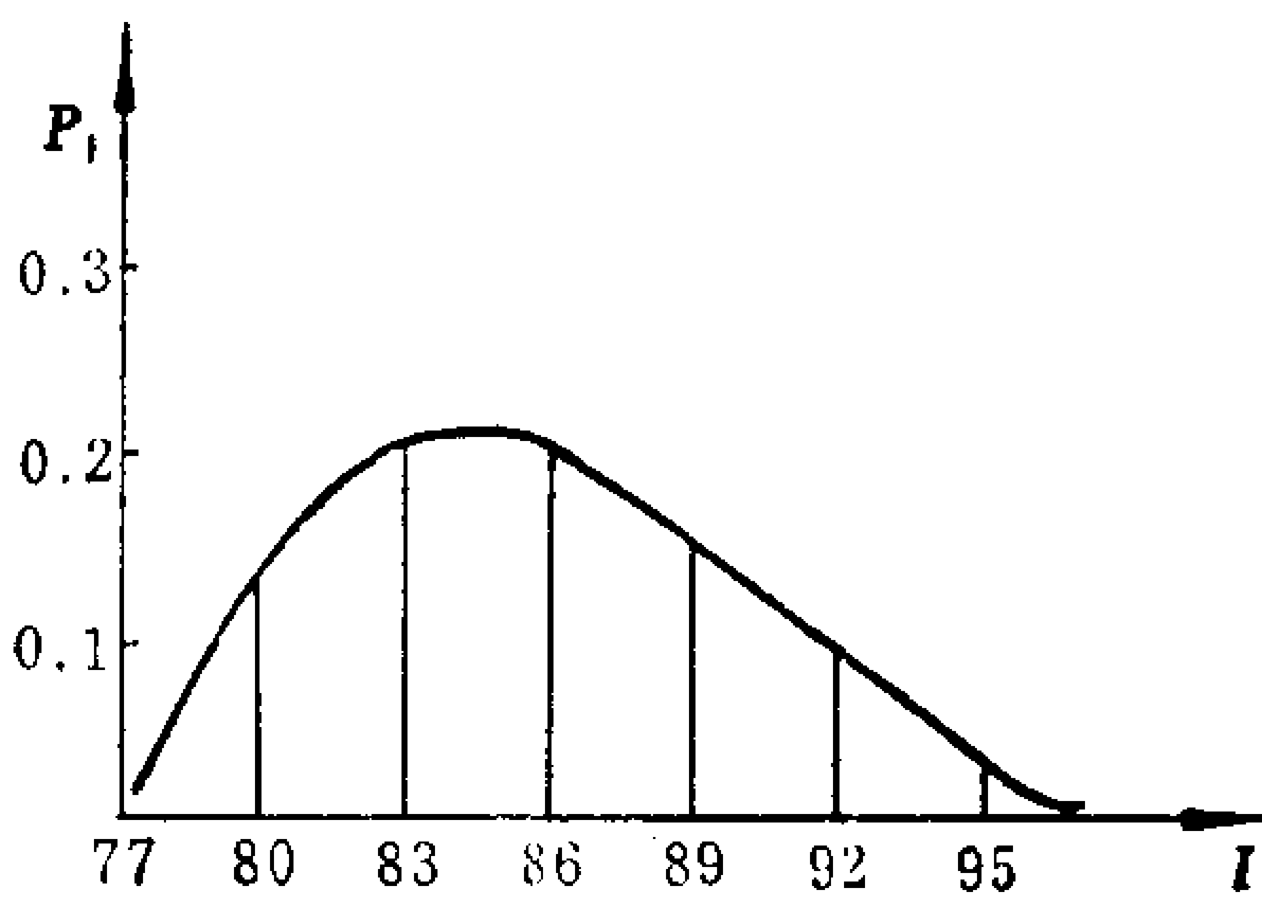


图4.4

**例题4.10** 根据某粮食仓库台账，运粮汽车到达仓库的间隔在（0～22）分钟内变动。连续统计500辆汽车的数据，列于表(4.21)。试问汽车到达间隔属何种分布。

表4.21

| 汽车到达间隔 $I_i$ | 发生次数 $n_i$ | 统计分布 概率密度 $f(I)$ | 统计分布 分布函数 $F(I)$ | 三阶爱尔朗分布 分布密度 $f'(I)$ | 三阶爱尔朗分布 分布函数 $F'(I)$ | $\lvert F'(I)-F(I)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—2小时 | 20 | 0.040 | 0.040 | 0.052 | 0.052 | 0.012 |
| 2—4 | 94 | 0.188 | 0.228 | 0.204 | 0.256 | 0.028 |
| 4—6 | 131 | 0.262 | 0.490 | 0.238 | 0.494 | 0.004 |
| 6—8 | 97 | 0.194 | 0.684 | 0.188 | 0.682 | 0.002 |
| 8—10 | 66 | 0.132 | 0.816 | 0.132 | 0.814 | 0.002 |
| 10—12 | 38 | 0.076 | 0.892 | 0.084 | 0.898 | 0.006 |
| 12—14 | 26 | 0.052 | 0.944 | 0.049 | 0.947 | 0.003 |
| 14—16 | 13 | 0.026 | 0.970 | 0.027 | 0.974 | 0.004 |
| 16—18 | 12 | 0.024 | 0.994 | 0.015 | 0.989 | 0.005 |
| 18—20 | 2 | 0.004 | 0.998 | 0.007 | 0.996 | 0.002 |
| 20—22 | 1 | 0.002 | 1.000 | 0.004 | 1.000 | 0.000 |

$\Sigma 500$

现在我们计算数字特征：

1）数学期望(平均数)：

$$M(I)=\bar{I}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}I_i=\frac{3432.94}{500}=6.866\text{小时}.$$

汽车到达强度为：

$$\lambda_k=\frac{1}{M(I)}=\frac{1}{6.866}=0.146\text{辆/时}.$$

$$M(I^2)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}I_i^2=\frac{30561.5}{500}=61.123(\text{小时})^2.$$

间隔时间的方差

$$\sigma^2(I)=M(I^2)-M^2(I)=61.123-6.866^2$$
$$=13.981(\text{小时})^2.$$

均方差为 $\sigma(I)=\sqrt{13.981}=3.739$小时。

偏离系数 $v(I)=\frac{\sigma(I)}{M(I)}=\frac{3.739}{6.866}=0.54$.

现在确定爱尔朗阶数：

$$k=\frac{1}{v^2}=\frac{1}{0.54^2}\approx 3.$$

因此，本题可能属三阶爱尔朗分布，其分布曲线如图4.5所示。

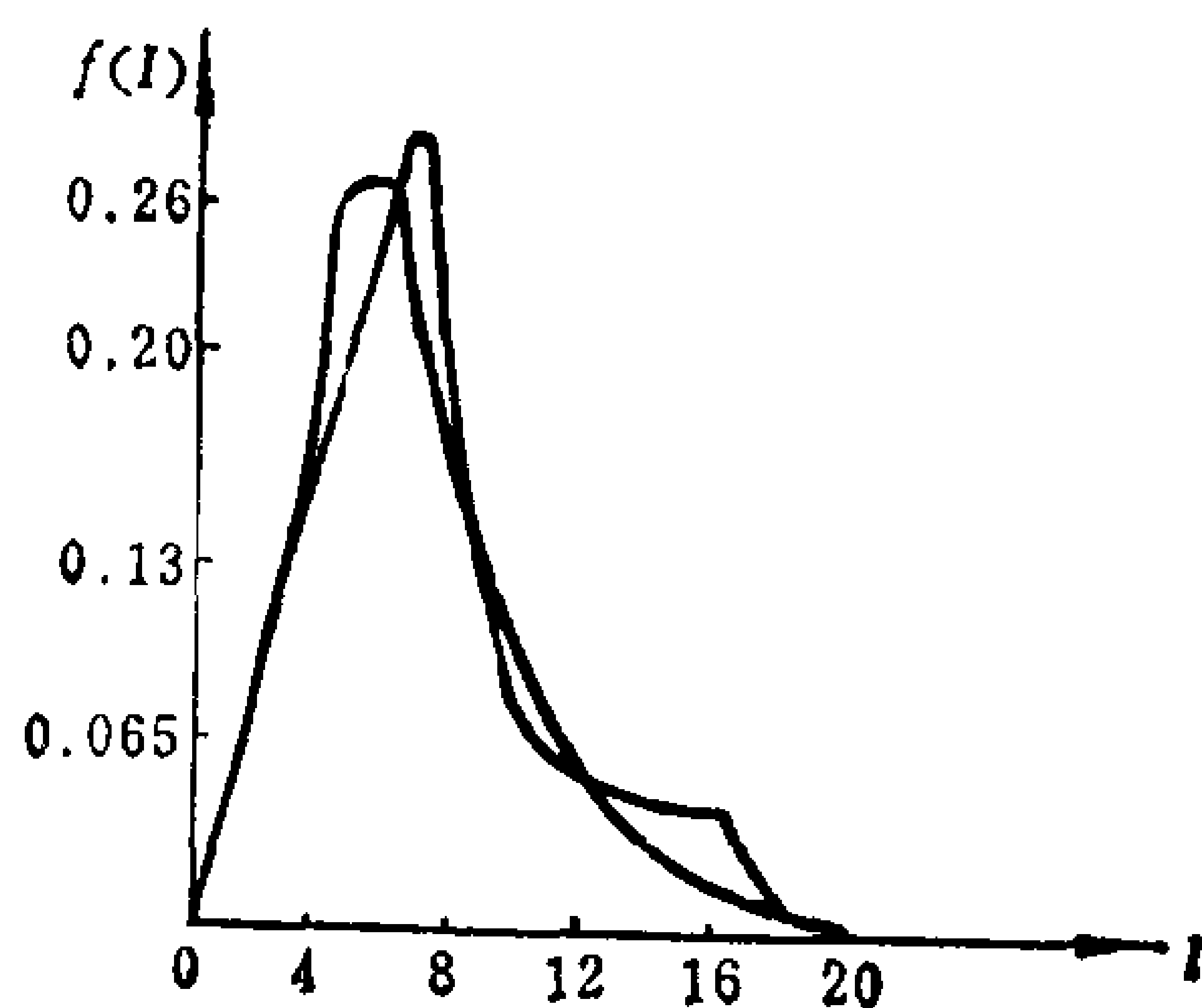


图4.5

本章在简单地讨论数理统计基本概念后，用实例阐明，建立统计分布的过程：其一，应根据给定可信度，确定最少的统计次数，并把搜集来的数据进行分组，用表格的形式或相当的计算公式确定统计分布的数字特征；其二，根据分布频率（统计概率）作出直方图和分布曲线；其三，根据分布曲线形状和偏离系数值，假设统计分布可能服从的理论分布，

最后进行统计检验(见下章)。

本章还阐明了第三章中的很多理论概念，并为下一章讨论理论检验奠定了基础。

# 第五章　统计分布与理论分布的比较

在上一章里，我们根据统计分布的曲线和偏离系数值假设统计分布服从某种理论分布。这些工作是必要的，但没有一个数量指标衡量统计分布与理论分布吻合的程度。理论分布与统计分布总是有误差的，需要解释产生误差的原因，或者由于统计次数不够，或者是假设的理论分布根本不对，这些将是本章所要回答的问题。

统计分布与理论分布吻合的程度叫适度检验。适度检验的方法很多，常用的是，皮尔逊$\chi^2$检验法和哥尔莫可尔夫法。本章先介绍方法的原理，后用实例说明检验的步骤。

## §1　皮尔逊$\chi^2$检验原理

设统计分布 $F_n(x)$服从理论分布$F(x)$。为了检验这个假设是否成立，我们先假设它是成立的，而后看由此产生什么后果。若导致不合理的现象发生，表明假设不是正确的，或者说，假设不能成立，因此，拒绝这个假设。如果由此没有导出不合理现象的发生，则假设是可以接受的。应该指出，所谓不合理现象，并不是形式逻辑中的绝对矛盾，而是基于人们在实践中广泛采用的一个原则："小概率"事件，即在一次随机试验中，某事件几乎是不可能发生的。例如，服从正态分布的随机变数$X$落在$\bar{x}\pm3\sigma$之外的概率为0.003，一般认为这一概率很小，因此，把$\bar{x}\pm3\sigma$看作$X$实际可能取值的范围。

构造一种检验法的关键在于选定一个小概率事件，通常取概率不超过0.01或0.05的事件作为小概率事件。

设进行$n$次独立试验，得到随机变数X的统计分布：

$X$: $x_1 x_2 \cdots x_n$

$f$: $f_1 f_2 \cdots f_n$

当$n$很大时，根据上一章介绍的分组方法进行分组，并计算组频数和组频率。如果假设成立，则按该理论分布计算随机变数X落在每个区间组内的概率 $p_i$。为了检验理论分布与统计分布的适度，需要分析概率与频率之差。我们把（$f_i - p_i$）的加权平方作为它们的差异度，记作$u$。

即 $$u = \sum_{i=1}^{k} c_i (f_i - p_i)^2$$

式中 $c_i$——为$i$区间的权。并令

$$c_i = \frac{n}{p_i}$$

权$c_i$的引入是正确的。因为通常各组内频率与概率之差，就其显著性说，不是等同的。实际上，（$f_i - p_i$）的绝对值相同时，$p_i$越大，其显著性越小，或者说，$c_i$与$p_i$成反比。

因为$f_i$和$p_i$都是随机变数，所以$u$也是随机变数。可以证明，当$n$很大时，$u$只与分组的组数有关系。如果假设成立，则它近似地服从$R$个自由度的$\chi^2_{观}$分布。即

$$u = \chi^2_{观} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - p_i)}{p_i}. \qquad (5.1)$$

因为 $$p_i = \frac{m_i}{n},$$

所以 $$\chi^2_{观} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \qquad (5.2)$$

式中 $k$——分组的数目；

$f$——统计频率；

$p$——理论概率；

$n$——统计次数。

应该指出，任何试验都有两种可能情况：第一，根据理论分布的一般表达式，求统计分布的数字特征；第二，利用统计分布求理论分布的估计参数。在$\chi^2$分布中，参数只与自由度$R$有关。即

$$R=k-s-1. \tag{5.3}$$

式中 $s$——估计参数的数目；

实践证明，一般，观察统计次数不少于50次，即分组的数目不少于5—10组。如果在有的组中，发生的次数很少（小于1—5次），则应把它们合并于相邻的组中，使它们发生的次数达到5—10次。

根据小概率一次试验实际不可能性原理，如果$\chi^2_{观}$小于按$\chi^2$分布表（见附录3）查得的$\chi^2$的临界值$\chi^2_{临}$，则没有根据拒绝假设的理论分布，或者说，统计分布与理论分布的差异不显著。如果$\chi^2_{观}>\chi^2_{临}$，则拒绝假设的理论分布。

## §2 皮尔逊$\chi^2$检验法举例

**例题5.1** 设统计分布为：

| $x_i$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 15 | 26 | 25 | 30 | 26 | 21 | 24 | 20 | 13 |

样本容量$n=200$。试用皮尔逊$\chi^2$检验它是否服从正态分布。显著性水平$\alpha=0.05$。

**解1** 运用上一章介绍的方法确定样本均值和样本均方差，得$\bar{x}=12.63$；$\sigma_{样}=4.695$。

2　考虑$n=200$，$h=2$，$\sigma_{样}=4.695$，按下式计算理论频数。

$$n'_i=\frac{nh}{\sigma_{样}}\varphi(u_i)=\frac{200\times 2}{4.695}\varphi(u_i)=85.2\varphi(u_i).$$

制订计算表[$\varphi(u_i)$ 值见附录(2)]

| $i$ | $x_i$ | $u_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_{样}}$ | $\varphi(u_i)$ | $n'_i=85.2\varphi(u_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | -1.62 | 0.1074 | 9.1 |
| 2 | 7 | -1.20 | 0.1942 | 16.5 |
| 3 | 9 | -0.77 | 0.2966 | 25.3 |
| 4 | 11 | -0.35 | 0.3752 | 32.0 |
| 5 | 13 | 0.08 | 0.3977 | 33.9 |
| 6 | 15 | 0.51 | 0.3503 | 29.8 |
| 7 | 17 | 0.93 | 0.2589 | 22.0 |
| 8 | 19 | 1.36 | 0.1582 | 13.5 |
| 9 | 21 | 1.78 | 0.0818 | 7.0 |

3．比较统计频数与理论频数：

$a$) 制订计算表，从中求观察条件值

$$\chi^2_{观}=\sum(n_i-n'_i)^2/n'_i. \tag{5.4}$$

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i-n_i'$ | $(n_i-n_i')^2$ | $(n_i-n_i')^2/n_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 9.1 | 5.9 | 34.81 | 3.8 |
| 2 | 26 | 16.5 | 9.5 | 90.25 | 5.5 |
| 3 | 25 | 25.3 | -0.3 | 0.09 | 0.0 |
| 4 | 30 | 32.0 | -2.0 | 4.00 | 0.1 |
| 5 | 26 | 33.9 | -7.9 | 62.41 | 1.8 |
| 6 | 21 | 29.8 | -8.8 | 77.44 | 2.6 |
| 7 | 24 | 22.0 | 2.0 | 4.00 | 0.2 |
| 8 | 20 | 13.5 | 6.5 | 42.25 | 3.1 |
| 9 | 13 | 7.0 | 6.0 | 36.00 | 5.1 |
| 计 | 200 | | | | $\chi^2_{观}=22.2$ |

自上表中求得$\chi^2_{观}=22.2$。

$b$）根据显著性水平$\alpha=0.05$，自由度$R=k-s-1=9-2-1=6$查$\chi^2$表（附录3）得：

$\chi^2_{临}(0.05,\ 6)=12.6$

因为$\chi^2_{观}>\chi^2_{临}$，所以假设拒绝，即统计分布与理论分布误差很大。

**例题5.2** 设显著性水平$\alpha=0.01$，统计频数$n_i$和理论频数$n'_i$为：

| $n_i$ | 8 | 16 | 40 | 72 | 36 | 18 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n'_i$ | 6 | 18 | 36 | 76 | 39 | 18 | 7 |

试用皮尔逊$\chi^2$比较，总体$X$是否为正态分布。

**解** 为了求$\chi^2_{观}=\sum(n_i-n'_i)^2/n'_i$制订计算表。

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i-n_i'$ | $(n_i-n_i')^2$ | $(n_i-n'_i)^2/n_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 6 | 2 | 4 | 0.667 |
| 2 | 16 | 18 | -2 | 4 | 0.222 |
| 3 | 40 | 36 | 4 | 16 | 0.444 |
| 4 | 72 | 76 | -4 | 16 | 0.211 |
| 5 | 36 | 39 | -3 | 9 | 0.231 |
| 6 | 18 | 18 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 10 | 7 | 3 | 9 | 1.286 |
| 计 | $n=200$ | | | | $\chi^2_{观}=3.061$ |

由表可知，$\chi^2_{观}=3.061$

根据$\alpha=0.01$，$R=7-3=4$，查$\chi^2$表得：$\chi^2_{临}=13.3$

因为$\chi^2_{观}<\chi^2_{临}$，所以没有根据否定假设。或者说，统计分布与理论分布之间的误差是偶然性的。

**例题5.3** 设$\alpha=0.05$，样本容量$n=100$，统计分布如表所

列，试用皮尔逊方法检验总体X是否服从正态分布。

**解1** 确定样本均值和均方差：

| 组号 | 组距 | 频数 $n_i$ | 组中值 $x^*_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3—8 | 6 | 5.5 |
| 2 | 8—13 | 8 | 10.5 |
| 3 | 13—18 | 15 | 15.5 |
| 4 | 18—23 | 40 | 20.5 |
| 5 | 23—28 | 16 | 25.5 |
| 6 | 28—33 | 8 | 30.5 |
| 7 | 33—38 | 7 | 35.5 |

$\bar{x}^* = 20.7$； $\sigma^* = 7.28$。

2． 因为$\bar{x}^* = 20.7$，$\sigma^* = 7.28$，$\frac{1}{\sigma^*} = 0.137$求间隔（$z_i$，$z_{i+1}$）为此，制订计算表格：

| $i$ | 组距 $x_i - x_{i+1}$ | $x_i - \bar{x}^*$ | $x_{i+1} - \bar{x}^*$ | 间隔端点 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{\sigma^*}$ | $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{\sigma^*}$ |
| 1 | 3—8 | — | -12.7 | $-\infty$ | -1.74 |
| 2 | 8—13 | -12.7 | -7.7 | -1.74 | -1.06 |
| 3 | 13—18 | -7.7 | -2.7 | -1.06 | -0.37 |
| 4 | 18—23 | -2.7 | 2.3 | -0.37 | 0.32 |
| 5 | 23—28 | 2.3 | 7.3 | 0.32 | 1.00 |
| 6 | 28—33 | 7.3 | 12.3 | 1.00 | 1.69 |
| 7 | 33—35 | 12.3 | — | 1.69 | $\infty$ |

3． 求理论概率$p_i$和理论频数$n'_i = np_i = 100p_i$，为此，制订计算表格：

| $i$ | $z_i$ | $z_{i+1}$ | $\Phi(z_i)$ | $\Phi(z_{i+1})$ | $p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$ | $n'_i=100p_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | -1.74 | -0.5000 | -0.4591 | 0.0409 | 4.09 |
| 2 | -1.74 | -1.06 | -0.4591 | -0.3554 | 0.1037 | 10.37 |
| 3 | -1.06 | -0.37 | -0.3554 | -0.1443 | 0.2111 | 21.11 |
| 4 | -0.37 | 0.32 | -0.1443 | 0.1255 | 0.2698 | 26.98 |
| 5 | 0.32 | 1.00 | 0.1255 | 0.3413 | 0.2158 | 21.58 |
| 6 | 1.00 | 1.69 | 0.3413 | 0.4545 | 0.1132 | 11.32 |
| 7 | 1.69 | | 0.4545 | 0.5000 | 0.0455 | 4.55 |
| 计 | | | | | 1 | 100 |

4）用皮尔逊法比较理论的与统计的频数：

$a$）计算$\chi^2_{观}$，为此，制订表格，求$\chi^2_{观}=\sum\left(\frac{n_i^2}{n'_i}\right)-n$

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i-n_i'$ | $(n_i-n_i')^2$ | $\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$ | $n_i^2$ | $\frac{n_i^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 4.09 | 1.91 | 3.6481 | 0.8920 | 36 | 8.8019 |
| 2 | 8 | 10.37 | -2.37 | 5.6169 | 0.5416 | 64 | 6.1716 |
| 3 | 15 | 21.11 | -6.11 | 37.3321 | 1.7684 | 225 | 10.6584 |
| 4 | 40 | 26.98 | 13.02 | 169.5204 | 6.2833 | 1600 | 59.3052 |
| 5 | 16 | 21.58 | -5.58 | 31.1364 | 1.4428 | 256 | 11.8628 |
| 6 | 8 | 11.32 | -3.32 | 11.0224 | 0.9737 | 64 | 5.6537 |
| 7 | 7 | 4.55 | 2.45 | 6.0025 | 1.3192 | 49 | 10.7692 |
| 计 | 100 | 100 | | | $\chi^2_{观}=13.22$ | | 113.22 |

检验：$\sum(n_i^2/n_i')-n=113.22-100=13.22=\chi^2_{观}$。

b）查$\chi^2$表，按$\alpha=0.05$，$R=k-s=7-3=4$得

$\chi^2_{临}=9.5$。

因为$\chi^2_{观}>\chi^2_{临}$所以假设总体$X$为正态分布被拒绝。或者说，统计分布与理论分布误差很大。

设连续随机变数$X$的统计分布形式为间隔序列$x_i-x_{i+1}$和

相应的频数$n_i$。试用皮尔逊法检验随机变数X服从指数分布。当显著性水平$\alpha$给定后可按下述步骤进行检验：

1）按给定的统计分布求$\bar{x}$为此求组中值$\bar{x}^*=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$。

2）采用估计参数$\lambda^*$，即$\lambda^*=\frac{1}{\bar{x}}$。

3）求落入每个区间$(x_i, x_{i+1})$内的概率

$p_i=p(x_i<X<x_{i+1})=e^{-\lambda x_i}-e^{-\lambda x_{i+1}}$。

4）计算理论频数：

$n_i'=n_ip_i$；式中$n=\sum n_i$--样本量。

5）比较理论的和统计的分布频数。

指数分布的自由度$R=k-2$。

**例题5.4** 经$n=200$次试验，其结果列于下表，求当$\alpha=0.05$时，总体X服从指数分布。

**解1** 求$\bar{x}$。

| $x_i-x_{i+1}$ | $n_i$ | $x_i-x_{i+1}$ | $n_i$ |
|---|---|---|---|
| 0—5 | 133 | 15--20 | 4 |
| 5—10 | 45 | 20--25 | 2 |
| 10—15 | 15 | 25--30 | 1 |

$\bar{x}=[(133\times2.5)+(45\times7.5)+(12\times12.5)+(4\times17.5)$
$+(2\times22.5)+(1\times27.5)]\div200=5$。

**2**．求假设的指数分布的参数估计：

$\lambda^*=\frac{1}{\bar{x}}=\frac{1}{5}=0.2$

因此，假设的指数分布的微分函数为

$f(x)=0.2e^{-0.2x}\qquad(x>0)$。

3. 求X落入每个区间的概率

$$p_i = p(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$$

例如，对第一组

$$p_1 = p(0 < X < 5) = e^{-0.2\times 0} - e^{-0.2\times 5} = 1 - e^{-1}$$
$$= 1 - 0.3679 = 0.6321.$$

同理可求：$p_2 = 0.2326$；$p_3 = 0.0855$；$p_4 = 0.0315$；

$p_5 = 0.0116$；$p_6 = 0.0042$。

4）求理论频数：

$$n_i' = np_i = 200p_i.$$

式中 $p_i$—X落入第$i$组内的概率

例如，$n_1' = 200 \times p_1 = 200 \times 0.6321 = 126.42$。

同理可求：$n_2' = 46.52$；$n_3' = 17.10$；$n_4' = 6.30$；$n_5' = 2.32$；

$n_6' = 0.84$。

5）比较理论分布与统计分布。为此，制订表格

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i - n_i'$ | $(n_i - n_i')^2$ | $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 133 | 126.42 | 6.58 | 43.2964 | 0.3425 |
| 2 | 45 | 46.52 | −1.52 | 2.3104 | 0.0497 |
| 3 | 15 | 17.10 | −2.10 | 4.4100 | 0.2579 |
| 4 | 7 | 9.46 | −2.46 | 6.0516 | 0.6397 |
| 计 | $n = 200$ | | | | $\chi^2_{观} = 1.29$ |

因为最后三组频数很少（4＋2＋1＝7），所以列成一组，这时相应的理论频数为（6.30＋2.32＋0.84＝9.46）。

由上表可见，$\chi^2_{观} = 1.29$。根据$\alpha = 0.05$，$R = 4 - 2 = 2$查$\chi^2$表得$\chi^2_{临} = 6.0$。

因为$\chi^2_{观} < \chi^2_{临}$，所以假设的理论分布没有理由拒绝，或者说，假设的指数分布与统计分布误差很小。

**例题5.5** 进行$n=100$ 次实现．每次实现由 $N=10$试验组成，每次试验中，事件$A$发生的概率$p=0.3$，其结果得到下列经验分布．($x_i$—在一次实现中事件$A$发生的次数；$n_i$—实现的次数)．

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 10 | 27 | 32 | 23 | 6 |

当$\alpha=0.05$时，试求离散随机变数$X$(事件$A$发生的次数)服从二项分布。

**解1** 按贝努里公式

$$P_i=P_N(i)=c_N^i p^i q^{N-i}.$$

求事件$A$在$N=10$次试验中发生$i$次的概率$p_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$

因为$p=0.3$，$q=1-0.3=0.7$，所以，

$$p_0=p_{10}(0)=0.7^{10}=0.0282;$$

$$p_1=p_{10}(1)=10\times0.3\times0.7^9=0.1211.$$

同理求得：$p_2=0.2335$；$p_3=0.2668$；$p_4=0.2001$；

$$P_5=0.1029.$$

2）求理论频数$n_i'=np_i$　考虑到，$n=100$所以，

$$n_0'=2.82;\ n_1'=12.11;\ n_2'=23.35;\ n_3'=26.68;$$

$$n_4'=20.01\quad n_5'=10.29.$$

3）统计的与理论的频数进行比较，为此，制订计算表格

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i-n_i'$ | $(n_i-n_i')^2$ | $\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 14.93 | -2.93 | 8.5849 | 0.5750 |
| 2 | 27 | 23.35 | 3.65 | 13.3225 | 0.5706 |
| 3 | 32 | 26.68 | 5.32 | 28.3024 | 1.0608 |
| 4 | 23 | 20.01 | 2.99 | 8.9401 | 0.4468 |
| 5 | 6 | 10.29 | 4.29 | 18.4041 | 1.7886 |
| 计 | $n=100$ | | | | $\chi^2_{观}=4.44$ |

因为$n_0=2(<5)$，所以与$n_1$合并，在表中为12。相应的理论频数：$n_0'+n_1'=2.82+12.11=14.93$

由表可得 $\chi^2_{观}=4.44$。

根据$\alpha=0.05$，$R=k-s=5-1=4$　查$\chi^2$表得$\chi^2_{临}=9.5$

因为$\chi^2_{观}<\chi^2_{临}$. 所以没有根据拒绝假设。

例题(5.6) 技术检验组，对$n=200$组同类产品进行检验，并得到如下统计分布：$x_i$——每组中的次品数；$n_i$ —含有$x_i$的组数。$\alpha=0.05$，试检验次品数X是否服从泊松分布。

**解** 1) 求样平均值$\bar{x}$。

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 116 | 56 | 22 | 4 | 2 |

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i x_i}{n}=(116\times 0+56\times 1+22\times 2+4\times 3+2$$

$$\times 4)\div 200=0.6。$$

2) 对泊松分布的参数进行估计：$\lambda=0.6$

即假设的泊松分布为

$$p_n(i)=\lambda^i \cdot e^{-\lambda}/i!,$$

有 $$p_{200}(i)=\frac{0.6^i}{i!}e^{-0.6}。$$

3) 设$i=0, 1, 2, 3, 4$。求$p_i$即在200组中，出现$i$次品的概率：

$p_0=p_{200}(0)=0.54881$；$p_1=p_{200}(1)=0.3293$；

$p_2=p_{200}(2)=0.0988$；$p_3=p_{200}(3)=0.0198$；

$p_4=p_{200}(4)=0.0030$。

4) 按下式求理论频数：

$n_i'=np_i=200p_i$,

$n_0'=200\times 0.5488=109.76$；$n_1'=65.86$；$n_2'=19.76$；

$n_3' = 3.96$; $n_4' = 0.60$。

5）比较统计分布与理论分布．为此，制订计算表格，并合并频数很少的最后两组：$(4+2)=6$ 其相应的理论频数为$3.96+0.60=4.56$。

| $i$ | $n_i$ | $n_i'$ | $n_i - n_i'$ | $(n_i - n_i')^2$ | $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 116 | 109.76 | 6.24 | 38.9376 | 0.3548 |
| 1 | 56 | 65.86 | -9.86 | 97.2196 | 1.4762 |
| 2 | 22 | 19.76 | 2.24 | 5.0176 | 0.2539 |
| 3 | 6 | 4.56 | 1.44 | 2.0736 | 0.4547 |
| 计 | $n=200$ | | | | $\chi^2_{观}=2.54$ |

由表可得，$\chi^2_{观}=2.54$。

根据$\alpha=0.05$，$R=4-2=2$，查$\chi^2$表得：$\chi^2_{临}=6.0$。

因为$\chi^2_{观}<\chi^2_{临}$，所以没有根据拒绝假设的理论分布。

**例题5.7** 由第四章例题(4.5)知，列车到达间隔时间的偏离系数$v=0.85$，可以假设为广义爱尔朗分布．因为$\lambda_1=4.8$；$\lambda_2=24$。所以根据第三章公式（3.31）写出列车到达间隔时间的密度分布式：

$$f(t)=\lambda_1\cdot\lambda_2\frac{e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$=4.8\times24\frac{e^{-4.8t}-e^{-24t}}{24-4.8}$$

或 $$f(t)=6(e^{-4.8t}-e^{-24t})。$$

我们按公式(5.2)进行适度检验．为了求$\chi^2_{观}$我们把$\chi^2_{观}$公式展开，列成计算表格：

表5.1

| 组中值 $x_i$ | 发生次数 $m_i$ | 理论频率 $p_i=0.1f(x_i)$ | $np_i$ | $m_i-np_i$ | $(m_i-np_i)^2$ | $\frac{m_i-np_i}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 129 | 0.291 | 151 | 22 | 484 | 3.20 |
| 0.15 | 143 | 0.275 | 137 | 6 | 36 | 0.26 |
| 0.25 | 97 | 0.179 | 94 | 3 | 9 | 0.096 |
| 0.35 | 60 | 0.115 | 58 | 2 | 4 | 0.07 |
| 0.45 | 35 | 0.069 | 36 | 1 | 1 | 0.03 |
| 0.55 | 21 | 0.043 | 22 | 1 | 1 | 0.046 |
| 0.65 | 13 | 0.026 | 13 | 0 | 0 | 0 |
| 0.75 | 8 | 0.016 | 8 | 0 | 0 | 0 |
| 0.85 | 5 | 0.010 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 0.95 | 5 | 0.006 | 3 | 2 | 4 | 1.33 |
| 1.05 | 4 }11 | 0.004 | 2 }6 | 2 }5 | 4 } 25 | 2 }4.33 |
| 1.15 | 2 | 0.002 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 522 | | | | | 7.87 |

计算时，组中值以小时为单位．概率密度公式中 $d(x_i)=0.1$（相邻两个组中值之差）．理论频率的计算：

$$p_1=0.1\times f(x_i)=0.1\times 6(e^{-4.8\times0.05}-e^{-24\times0.05})$$
$$=0.291.$$
$$p_2=0.1\times 6(e^{-4.8\times0.15}-e^{-24\times0.15})=0.275$$
$$\vdots$$

以此类推，求出各组的$p_i$．

因为 $\sum\limits_i m_i=n$，所以 $np_1=522\times0.291=151$．

$$np_2=522\times0.275=137,$$

以此类推，求得所有的$np_i$值．

最后，把各组的$\chi_i^2$值加总得7.87．

在表中最后三个组中落入的次数很少，所以把最后三个组合并成一个组．

表5.2

| 月<br>日 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 十一 | 十二 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | — | 1 | — | 3 | 4 | 1 | 1 | — | 2 | 2 | — |
| 2 | — | — | — | — | — | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | — | 1 | 1 | 2 | 2 | — | 3 | — | 1 | — |
| 4 | — | — | 3 | 1 | — | — | 1 | 2 | 1 | — | 1 | 1 |
| 5 | — | — | — | — | 1 | — | — | 1 | 2 | 1 | — | — |
| 6 | — | — | — | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | — | 2 | — | 1 | — | — | — | — | — |
| 8 | — | 1 | — | 2 | — | — | — | — | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 9 | 1 | — | 1 | — | 2 | 1 | 1 | 1 | — | 2 | — | — |
| 10 | 1 | 1 | — | — | — | — | 2 | 2 | — | 1 | — | — |
| 11 | — | — | — | — | 1 | 1 | — | — | — | — | 1 | 1 |
| 12 | — | — | — | — | 3 | 1 | — | 2 | 2 | — | 2 | 1 |
| 13 | 2 | — | — | 1 | 1 | — | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | — |
| 14 | 2 | 1 | — | 1 | 2 | 1 | — | — | 2 | 1 | 3 | 1 |
| 15 | — | — | 1 | 2 | 1 | — | — | 1 | — | 1 | 2 | 2 |
| 16 | 1 | — | — | — | 2 | — | 1 | — | 1 | — | — | 1 |
| 17 | 1 | — | — | 1 | — | 2 | 1 | 2 | 1 | 4 | — | 1 |
| 18 | — | 1 | — | 2 | 2 | 1 | — | 2 | 2 | — | 1 | — |
| 19 | 1 | 1 | — | 1 | — | 1 | — | 1 | 4 | — | 4 | 3 |
| 20 | — | — | — | — | 3 | 1 | 1 | — | — | 2 | — | — |
| 21 | — | — | — | — | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | — |
| 22 | — | 1 | — | 1 | 1 | 1 | — | — | 3 | 3 | — | 2 |
| 23 | — | 2 | 1 | 1 | — | 1 | — | — | 2 | 1 | — | 1 |
| 24 | 3 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | — | — | — | 1 | 2 | — |
| 25 | — | — | — | 1 | — | 1 | 1 | 1 | 1 | — | 1 | — |
| 26 | — | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | — | 1 | 2 | 1 | — |
| 27 | — | — | — | 1 | 1 | — | — | 2 | 2 | 1 | — | — |
| 28 | 1 | — | 1 | 1 | 2 | — | — | — | 3 | 2 | 1 | 2 |
| 29 | 1 |  | — | — | 1 | — | 2 | — | — | 1 | 3 | 1 |
| 30 | 1 |  | 1 | 1 | — | — | 1 | 1 | 2 | — | — | — |
| 31 | 2 |  | 1 |  | 1 |  | 1 | 1 |  | — |  | — |

广义爱尔朗分布有两个参数，所以，自由度$R=k-s-1=10-2-1=7$。

若显著水$\alpha=0.05$，则根据$R=7$，$\alpha=0.05$查$\chi^2$表（见附录3）得$\chi^2_{临}=16.9$。

因为 $\chi^2_{临}>\chi^2_{观}$，所以假设的广义爱尔朗分布被接受。

**例题5.8** 德国罗斯克港1966年统计:海轮到达的资料如表(5.2)所列。为了适度检验我们制订计算表格(5.3)

**表5.3**

| 每昼夜到达海输数目 | 统计频数$n_i$ | 频 率 $f_i$ | 理论频数$n'_i$ | $n_i-n_i'$ | $\frac{f^2}{F}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 159 | 0.437 | 160 | -1 | 0.006 |
| 1 | 132 | 0.362 | 132 | 0 | 0.000 |
| 2 | 56 | 0.149 | 54 | +2 | 0.074 |
| 3 | 14 | 0.041 | 15 | | |
| 4 | 4 }19 | 0.009 | 4 }19 | -2 | 0.053 |
| 5 | 1 | 0.001 | 0 | | |
| 计 | 365 | 0.999 | 365 | 0 | $\chi^2=0.133$ |

∵ $R=4-2=2$,

$\alpha=0.05$, ∴$\chi^2_{临}=5.991$。

∴$\chi^2_{临}>\chi^2_{观}$因而假设的理论分布（泊松流）不能拒绝。

## §3 哥尔莫可尔夫检验法

设$F_n(x)$为统计分布函数，其容量为$n$。$F(x)$为理论分布函数；两者之差不超过$\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}$的概率为

$$P(\lambda_n)=P\left\{max|F_n(x)-F(x)|\geqslant\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}\right\} \tag{5.5}$$

把$F_n(x)$和$F(x)$的值代入(5.5)得最大值 $D_{max}$。

则， $$\lambda_n = D_{max}\sqrt{n}. \tag{5.6}$$

根据$\lambda_n$值，按表(5.4) 即可查定概率$P(\lambda_n)$。

表5.4

| $\lambda_n$ | $p(\lambda_n)$ | $\lambda_n$ | $p(\lambda_n)$ | $\lambda_n$ | $p(\lambda_n)$ | $\lambda_n$ | $p(\lambda_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.29 | 1.0000 | 0.70 | 0.7112 | 1.30 | 0.0681 | 2.20 | 0.0001 |
| 0.30 | 0.9999 | 0.75 | 0.6272 | 1.40 | 0.0397 | 2.30 | 0.0001 |
| 0.35 | 0.9997 | 0.80 | 0.5141 | 1.50 | 0.0222 | 2.40 | 0.0000 |
| 0.40 | 0.9972 | 0.85 | 0.4653 | 1.60 | 0.0120 | 2.50 | 0.0000 |
| 0.45 | 0.9874 | 0.90 | 0.3927 | 1.70 | 0.0062 | | |
| 0.50 | 0.9639 | 0.95 | 0.3275 | 1.80 | 0.0032 | | |
| 0.55 | 0.9228 | 1.00 | 0.2700 | 1.90 | 0.0015 | | |
| 0.60 | 0.8643 | 1.10 | 0.1777 | 2.00 | 0.0007 | | |
| 0.65 | 0.7920 | 1.20 | 0.1122 | 2.10 | 0.0003 | | |

如果$F_n(x)$和$F(x)$ 之差的概率小于0.01，则假设的理论分布与统计分布不相吻合。

**例题5.9** 在某港码头，在728.5小时内，到港靠码头的有42只船。即平均间隔为$728.5 \div 42 = 17.8$小时，$\lambda = \frac{41}{728.5} = 0.0565$。而实际间隔与理论间隔之差的最大值$D_{max} = 0.0858$。从而 $D_{max}\sqrt{n} = 0.0858\sqrt{41} = 0.55$ 查表(4.15)得$P(\lambda_n) = 0.9228$，因此，假设的指数分布可以被接受。

**例题5.10** 汽车到达粮食仓库的统计资料（见第四章例题(4.10)。现在我们用两种方法给予适度检验。

(1) $\chi^2$法。把检验过程列成表格形式

自由度$R = 11 - 3 = 8$。根据$R$和$\chi^2$查$\chi^2$表得$\chi^2_{临 0.05} = 15.5$。

∴ $\chi^2_{临} > \chi^2$，因而三阶爱尔朗分布可以被接受。

表5.5

| 发生的次数$n_i$ | 发生的频率$f_i$（三级爱尔朗） | $nf_i$ | $(m_i-nf_i)^2$ | $\frac{(m_i-nf_i)^2}{nf_i}$ |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 0.052 | 26.0 | 36.00 | 1.38 |
| 94 | 0.204 | 102.0 | 64.00 | 0.63 |
| 131 | 0.238 | 119.0 | 144.00 | 1.21 |
| 97 | 0.188 | 94.0 | 9.00 | 0.10 |
| 66 | 0.132 | 66.0 | 0.00 | 0.00 |
| 38 | 0.081 | 42.0 | 16.00 | 0.38 |
| 26 | 0.049 | 24.5 | 2.25 | 0.09 |
| 13 | 0.027 | 13.5 | 0.25 | 0.02 |
| 12 | 0.015 | 7.5 | 20.25 | 2.70 |
| 2 | 0.007 | 3.5 | 2.25 | 0.04 |
| 1 | 0.004 | 2.0 | 1.00 | 0.50 |
| 500 | | | | $\chi^2=7.65$ |

（2）哥尔莫可尔夫方法。

由例题(4.10)表(4.21)知，$D_{max}=0.028$。

$$\therefore \quad \lambda_n=D_{max}\sqrt{n}=0.028\sqrt{500}=0.63.$$

查表(5.4) 得$p(\lambda_n)=0.63$。它大于0.01 所以汽车到达粮食仓库可以看作三阶爱尔朗分布。

本章讨论了用$\chi^2$皮尔逊检验法，哥尔莫可尔夫检验法。

在用$\chi^2$法时，通常在表格上计算$\chi^2_{观}$值；根据显著性水平$\alpha=0.01$或0.05和自由度$R=k-s-1$查附录(3)，得到$\chi^2_{临}$值。

当$\chi^2_{临}>\chi^2_{观}$值时，假设的理论分布可以接受；

当$\chi^2_{临}<\chi^2_{观}$值时，不能接受。

为了建立排队模型，需要运用一些技巧，获得顾客到达流和服务时间流的分布律，这是下一章要讨论的问题。

# 第六章　哥尔莫可尔夫方程、生灭过程和李太勒公式

本章主要讨论关于分析简单排队模型的一些重要方法，即哥尔莫哥尔夫方程，生、灭图和李太勒公式。

实物系统在事件流的作用下，由一个状态转移到另一个状态，要求得系统状态的概率，首先要建立状态概率满足的方程式，这就是哥尔莫可尔夫方程。

生、灭图是系统状态图的变种，是建立状态概率所满足的方程式的有效工具。根据它，可以直接写出系统状态的代数方程，从而方便地求得系统的极限概率。

李太勒公式是当系统处于极限平稳状态时，系统中顾客的平均数和顾客的平均停留时间之间所满足的关系式，以及系统内，排队顾客的平均数与顾客的平均等待时间所满足的关系式。它们在排队论中起着重要作用。

## §1　哥尔莫可尔夫方程

在前面，我们讨论过离散状态和连续时间的马尔可夫随机过程。我们还知道了各种事件流。本章将把它们结合起来一起讨论。

设服务系统 $S$，在事件流的作用下，系统由一种状态转移到其它可能状态（见图6.1）。

如果系统状态转移过程为马尔可夫随机过程。讨论起来就

非常容易了。

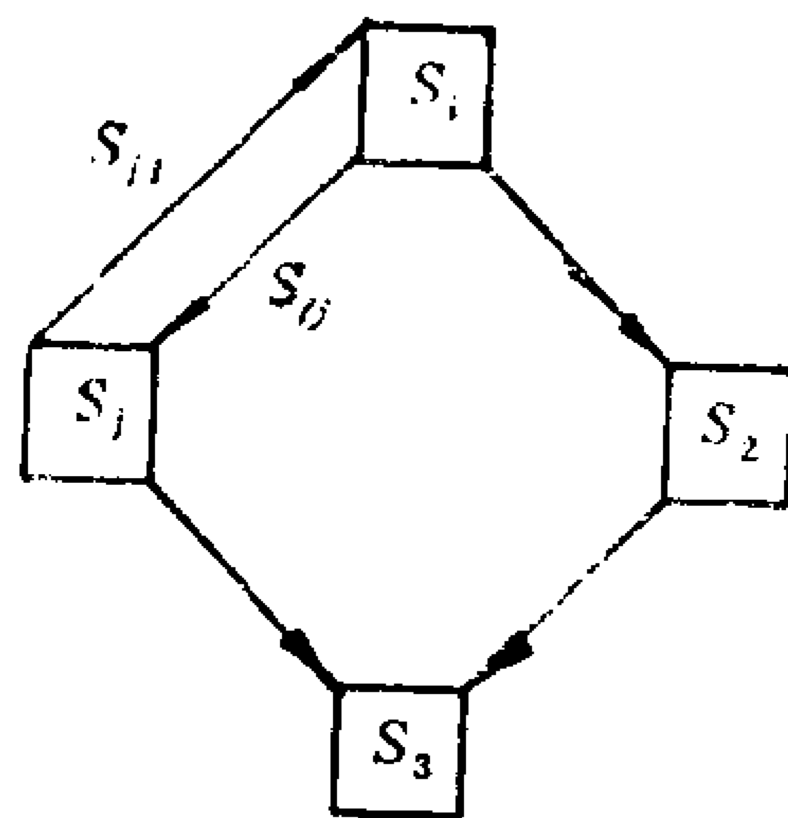


图6.1

若系统S处于某种状态$S_i$（在图6.1中，$i=0$）。由此，可转移到$S_j$（在图6.1中，$j=1$）图中的箭头线就会从$S_0$指向$S_1$。我们把它看作系统处于$S_0$ 在事件流的作用下，系统状态由$S_0$转移到$S_1$。在每条箭头线旁边标上沿着该方向运动的事件流的强度。比如，$\lambda_{ij}$ 一系统状态从 $S_i$转移到$S_j$时作用流的强度。下面我们再一次写出由两台机床组成的机械系统的状态。

$S_0$——两台机床都在正常工作；

$S_1$——第一台机床发生故障；第二台机床在正常工作？

$S_2$——第一台机床正常工作；第二台机床发生故障；

$S_3$——两台机床都发生故障。

我们假定两台机床的修理时间是独立的。或者说，每台机床配备专门人员修理。我们的目的，求改变系统状态的流的强度。

哪种事件流把系统状态由$S_0$转移到$S_1$呢？显然，它是第一台机床的故障流，其强度为；$\lambda_{01}=\frac{1}{t_1}$,式中$t_1$是第一台机床的无故障工作的平均时间。又是什么流把系统状态由 $S_1$ 转移到 $S_0$ 呢？这是第一台机床的修复流。或者说，第一台机床的故障排除了，并重新开始工作了。它的强度$\lambda_{10}=\frac{1}{t_2}$，式中 $t_2$ 是第一台机床的平均修理时间。（图6.1中其余状态的转移过程，读者可以自己去理解）。

有了系统状态转移图，建立该过程的数学模型就比较容易了。

设系统有$n$个可能状态：$S_1$，$S_2$，…，$S_n$。我们叫第$i$个状态的概率$P_i(t)$，即在$t$时刻，系统处$S_i$状态的概率。当然，任何时刻$t$，状态概率之和等于1。即

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

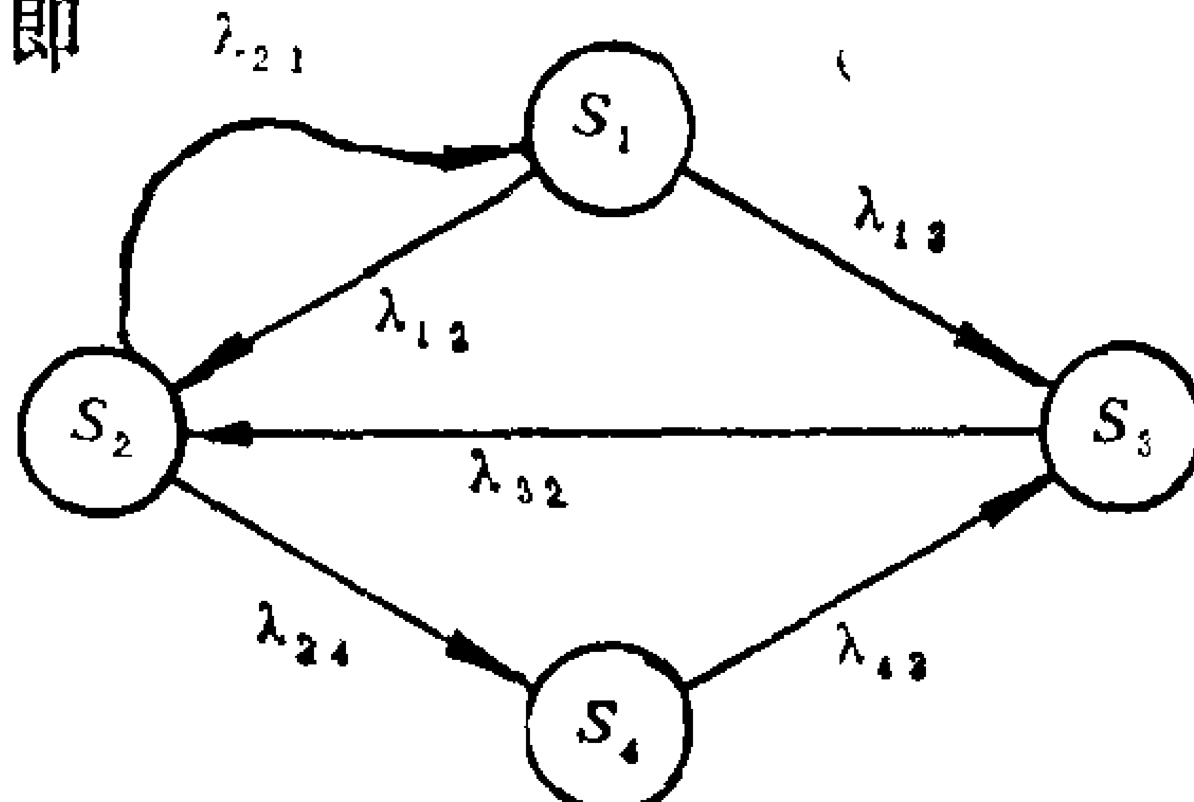



图6.2

根据系统状态转移图建立哥尔莫可尔夫方程（特殊形式的微分方程，方程中的未知函数是$t$时刻的状态概率），或者说，它是$t$时刻的状态概率所满足的微分方程。怎样建立这种方程呢？下面我们用实例说明。

设系统$S$有四种可能状态：$S_1$，$S_2$，$S_3$和$S_4$。系统状态转移图如图（6.2）。我们讨论状态概率$P_1(t)$，即讨论在$t$时刻，系统处于$S_1$时的状态概率。给时间$t$某些增量$\Delta t$，求$P_1(t+\Delta t)$，即求在（$t+\Delta t$）时刻，系统仍处于$S_1$状态的概率。这怎样实现呢？有两种可能情况：（1）在$t$时刻系统已经处于$S_1$状态，而在$\Delta t$时间内，没有改变原来的状态；（2）在$t$时刻，系统处于$S_2$状态，而在$\Delta t$时间内，系统由$S_2$状态还原到$S_1$状态。我们先考虑情况（1）时的状态概率。在$t$时刻，系统处于$S_1$时的状态概率为$P_1(t)$；在$\Delta t$时间内，系统状态没有转移到$S_2$和$S_3$（见图6.2）。现在的问题是怎样求得系统状态没有转移的概率。为此作如下讨论。

设从$S_1$出发的流，其强度为$\lambda_{12}+\lambda_{13}$（见图6.2）。如果这两个流都是最简单流，则它们的和仍是最简单流。所以，在$\Delta t$时间内，自$S_1$发出的概率近似地为（$\lambda_{12}+\lambda_{13}$）$\Delta t$，自$S_1$没有转移的概率为$[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t]$。那么，在第一种情况下的概率近似地为

$$P_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t]$$

再讨论第(2) 种情况。在$t$时刻，系统处于$S_2$状态的概率为$P_2(t)$，而在$\Delta t$时间内，系统状态由$S_2$转移到$S_1$的状态概率近似地为$\lambda_{21}\Delta t$。所以，第（2）种情况下的近似概率应为

$$P_2(t_{\bullet})\lambda_{21}\Delta t$$

根据不相容事件的加法定理，把它们加起来便得到：

$$P_1(t+\Delta t)=P_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t]$$
$$+P_2(t)\lambda_{21}\Delta t.$$

将上式等号右边去掉括号，把$P_1(t)$移到等号左边，再在等号两边都用$\Delta t$除，便可得到

$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=\lambda_{21}P_2(t)-(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1(t).$$

令 $\Delta t\to 0$。等号左边成为$P_1(t)$的导数。即

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=\lambda_{21}P_2(t)-(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1(t)$$

为了简化起见，再去掉上式中的$t$，得：

$$\frac{dP_1}{dt}=\lambda_{21}P_2-(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1 \tag{1'}$$

同理，可求得图（6.2）中的其余状态概率微分方程：

$$\frac{dP_2}{dt}=\lambda_{12}P_1+\lambda_{32}P_3-(\lambda_{24}+\lambda_{21})P_2, \tag{2'}$$

$$\frac{dP_3}{dt}=\lambda_{13}P_1+\lambda_{43}P_4-\lambda_{32}P_3, \tag{3'}$$

$$\frac{dP_4}{dt}=\lambda_{24}P_2-\lambda_{43}P_4. \tag{4'}$$

这是四个线性微分方程，有4个未知函数，$P_1$，$P_2$，$P_3$和$P_4$。根据正则条件，$P_1+P_2+P_3+P_4=1$。

综上所述，可以归纳出建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则：每个方程式的等号左边是第$i$个状态概率的微分，等号右边是所

有状态概率乘积之和，即以 $i$ 状态为基础，所有转移到 $i$ 状态的概率及其相应流的强度之积减去自 $i$ 状态转移出去的所有状态概率及其相应流的强度之积。

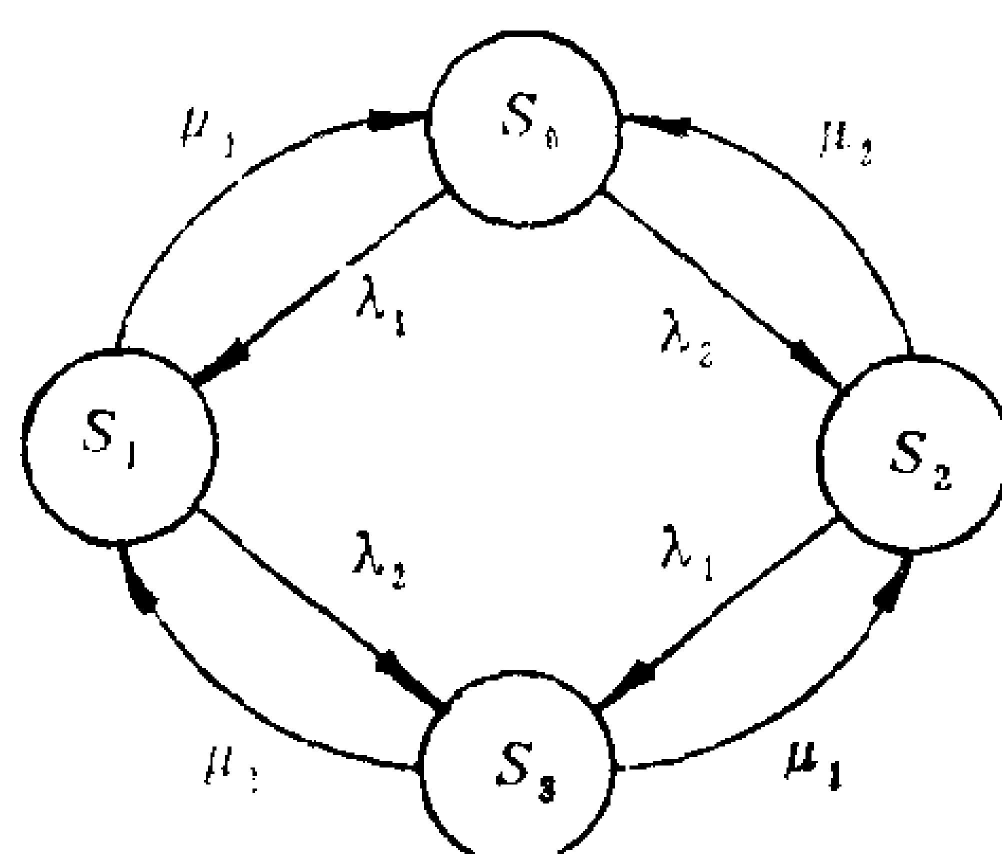


图6.3

现在我们运用这个法则写出前面用过的例子：由两个机床组成的机械系统的哥尔莫可尔夫方程，其状态转移图如图(6.3)所示。

$$\frac{dP_0}{dt}=\mu_1P_1+\mu_2P_2-(\lambda_1+\lambda_2)P_0,$$

$$\frac{dP_1}{dt}=\lambda_1P_0+\mu_2P_3-(\mu_1+\lambda_2)P_1,$$

$$\frac{dP_2}{dt}=\lambda_2P_0+\mu_1P_3-(\lambda_1+\mu_2)P_2,$$

$$\frac{dP_3}{dt}=\lambda_2P_1+\lambda_1P_2-(\mu_1+\mu_2)P_3.$$

求方程组中的状态概率时，我们给出初始条件。如果系统的初始状态$S_i$，开始时刻$t=0$，则 $P_i(0)=1$。其余初始概率等于零。例如方程组中，$P_0(0)=1$，$P_1(0)=P_2(0)=P_3(0)=0$。这就表示在开始时刻两台机床都在正常工作。

怎样求解哥尔莫可尔夫方程呢？在解方程之前，可先给自己提一个问题：当$t\to\infty$时，状态概率将发生什么变化？$P_1(t)$，$P_2(t)$，… 是否趋于极限？假若这些极限存在，且与初始状态无关，这种概率就叫极限概率或者说稳态概率。（关于极限概率的物理意义，在后面说明。）可以证明，如果系统状态数目是有限的，且从任何一个状态都可以转移到其余任何一个状态，那么状态的极限概率就存在。设该条件满足，极限概率应为

$$\lim_{t\to\infty} P_i(t) = P_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots n).$$

极限概率仍用 $P_1$，$P_2\cdots$ 表示。因为极限概率本身就是状态概率，但已经不是时间的函数，而是常数。显然，它们仍然满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

如何理解极限概率呢？当 $t\to\infty$ 时，系统处于极限平稳状态，这时系统状态虽然随机变化着，但是它们的概率不再随时间而变化。状态$S_i$的极限概率表示系统处于$S_i$状态相对的平均时间。例如，某系统有三种状态$S_1$，$S_2$，$S_3$，它们的极限概率分别为 0.2，0.3，0.5，或者说，系统处于极限平稳时，平均20%的时间处于状态$S_1$，30%的时间处于状态 $S_2$,50%的时间处于状态$S_3$。

如何计算极限概率呢？很简单。因为极限概率$P_i$是常数。常数的微分等于零。因此，使哥尔莫可尔夫方程式的等号左边等于零，即把微分方程变成代数方程就行了。

在实际工作中，不必列出哥尔莫哥尔夫方程，而可以根据状态图直接写出代数方程。其一般方法如下：

等号左边，给定的状态概率乘上从给定状态发出的流的强度之和；

等号右边，所有能进入给定状态的状态概率及其相应强度的积之和。

总之，给定状态单位时间发出的平均数等于单位时间到达的平均数。

运用上述方法，列出状态图（6.3）的代数方程

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)P_0&=\mu_1P_1+\mu_2P_2,\\(\lambda_2+\mu_1)P_1&=\lambda_1P_0+\mu_2P_3,\\(\lambda_1+\mu_2)P_2&=\lambda_2P_0+\mu_1P_3,\\(\mu_1+\mu_2)P_3&=\lambda_2P_1+\lambda_1P_2.\end{aligned}\right\}\qquad(6.3)$$

从四个线性代数方程式中解四个未知数，$P_0$，$P_1$，$P_2$，$P_3$，应该是没有问题的。但问题在于四个方程式都没有自由项。幸而我们可以运用正则条件。

$$P_0+P_1+P_2+P_3=1,$$

从而方程组得解。

我们用具体的数值说明。设$\lambda_1=1,\lambda_2=2$，$\mu_1=2$，$\mu_1=3$。把它们代入方程组，得

$$\left.\begin{aligned}3P_0&=2P_1+3P_2,\\4P_1&=P_0+3P_3,\\4P_2&=2P_0+2P_3,\\5P_3&=2P_1+P_2,\\P_0+P_1&+P_2+P_3=1.\end{aligned}\right\}\qquad(6.4)$$

解之得　$P_0=0.40$，$P_1=0.20$，$P_2=0.27$，$P_3=0.13$。即在极限的平稳状态时，系统$S$有40%的时间处于状态$S_0$（两台机床都在工作），20%—处于状态$S_1$（第一台机床发生故障，第二台在工作），27%—处于$S_2$（第一台工作，第二台机床在修理），13%的时间处于$S_3$状态（两台机床都发生故障）。这些极限概率可以用来评价系统的工作效果和修理机构的负荷。设系统$S$处于$S_0$（两台机床都工作）时，单位时间内可得收入8元；在$S_1$时，可得3元；在$S_2$时，可得5元，在$S_3$时没有收入。这样，在极限的平稳过程中，单位时间内可得平均收入：$0.40\times8+0.20\times3+0.27\times5=5.15$元。

现在我们来评价修理机构（工人）的负荷水平。第一台机

床需要修理的时间的概率为：$P_1+P_3=0.2+0.13=0.33$ 第二台为：$P_2+P_5=0.40$。

**例题6.1** 某系统$S$有可能状态：$S_1, S_2, S_3$和$S_4$。状态转移图如图（6.4）所示。在箭头线旁标有相应的强度。试求系统状态的极限概率：$P_1, P_2, P_3, P_4$。

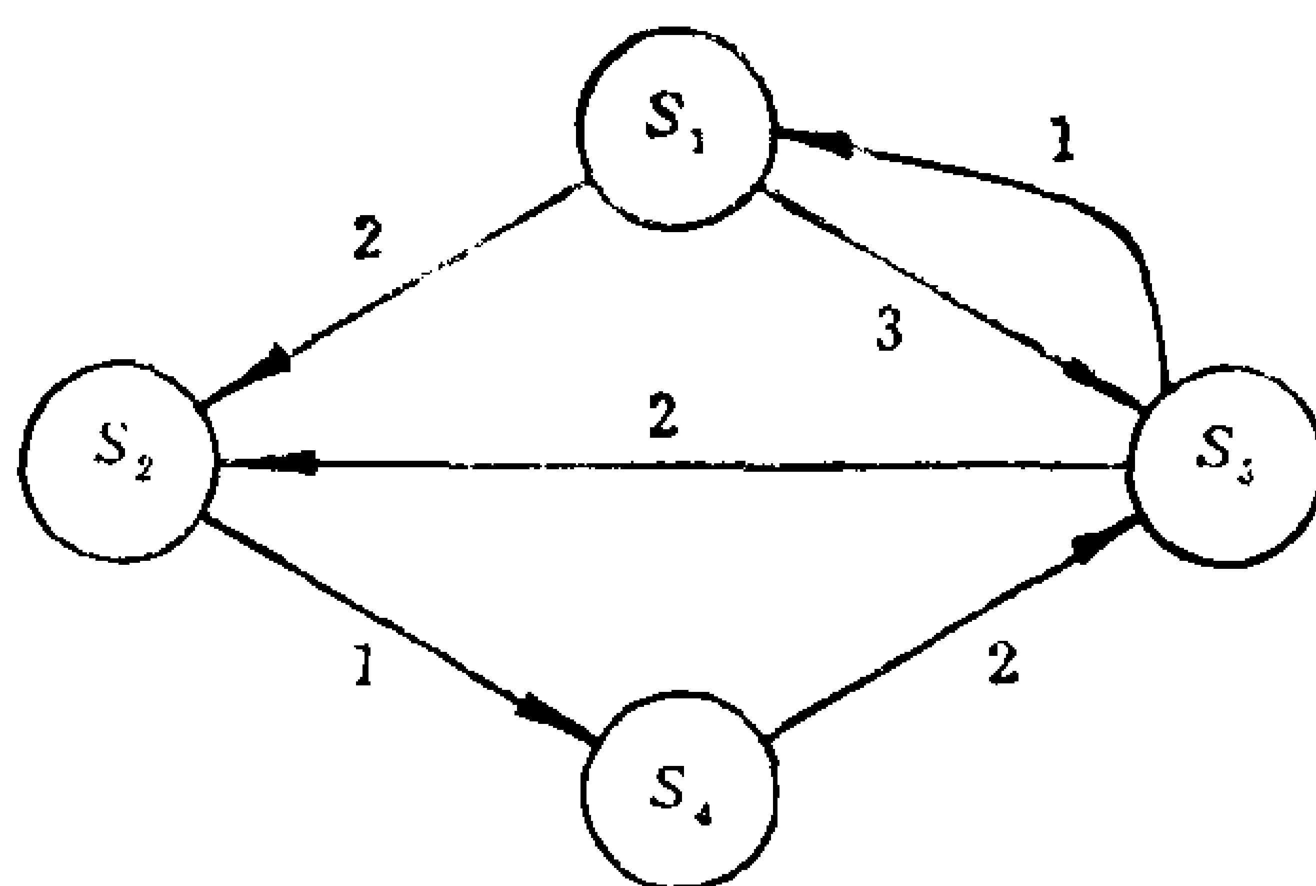



图6.4

**解** 根据状态图直接写出哥尔莫哥尔夫方程：

$$\frac{dP_1}{dt}=-2P_1-3P_1+P_3,$$

$$\frac{dP_3}{dt}=-2P_3-P_3+3P_1+2P_4,$$

$$\frac{dP_2}{dt}=-P_2+2P_1+2P_3,$$

$$\frac{dP_4}{dt}=-2P_4+P_2.$$

使等式左边等于零，得

$$\left.\begin{array}{l}0=-5P_1+P_3,\\0=-P_2+2P_1+2P_3,\\0=-3P_3+3P_1+2P_4,\\0=-2P_4+P_2,\\P_1+P_2+P_3+P_4=1.\end{array}\right\}$$

把各方程式都用$P_1$表示，得

$$P_3=5P_1,$$

$$P_2=2P_1+2P_3=2P_1+10P_1=12P_1,$$

$$P_4=\frac{1}{2}P_2=6P_1,$$

$\therefore \quad P_1 + 12P_1 + 5P_1 + 6P_1 = 1$。

从而， $24P_1 = 1$， $P_1 = \dfrac{1}{24}$； $\quad P_2 = 12P_1 = \dfrac{1}{2}$；

$$P_3 = 5P_1 = \frac{5}{24}; \qquad P_4 = 6P_1 = \frac{1}{4}.$$

**例题6.2** 已知状态图（6.5）

求状态极限概率

**解** 根据状态图（6.5）直接写出状态概率代数方程：

$\lambda_{31}P_3 = \lambda_{12}P_1$，… (1)

$\lambda_{12}P_1 = \lambda_{23}P_2$， … (2)

$\lambda_{23}P_2 = \lambda_{31}P_3$， … (3)

$P_1 + P_2 + P_3 = 1$。 … (4)

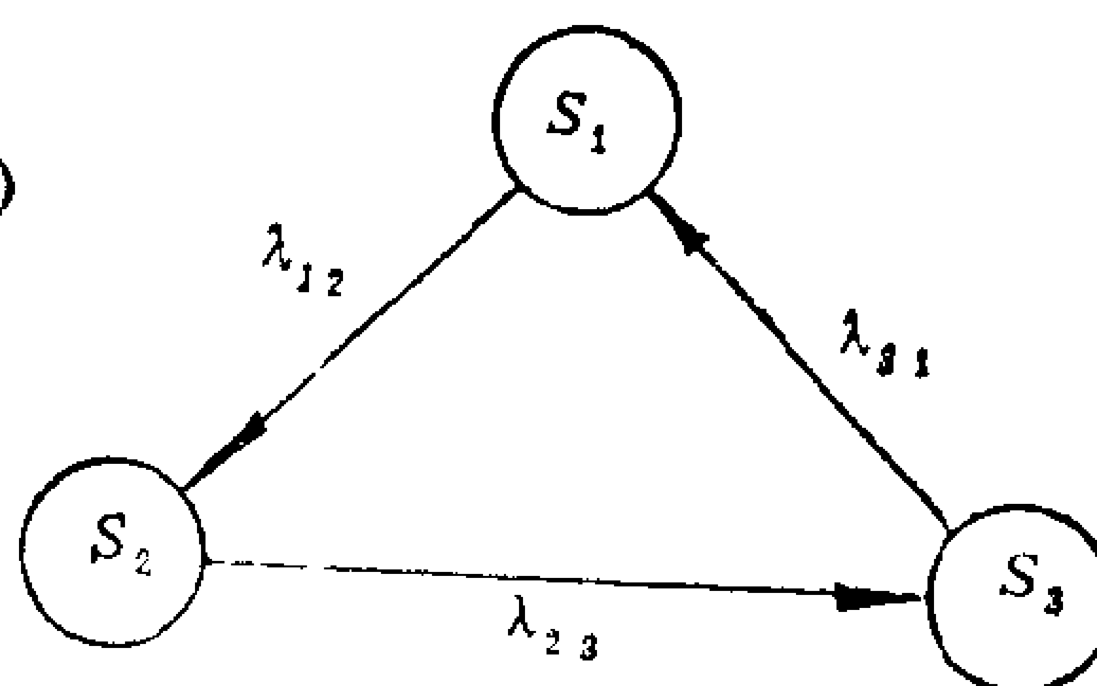



图6.5

由（1）得 $\quad P_3 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}} P_1$，

由（2）得 $\quad P_2 = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} P_1$。

把它们代入（4），得

$$P_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} P_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} P_1 = 1,$$

从而，得

$$P_1 = \frac{1}{1 + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}},$$

$$P_2 = \frac{\dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}}{1 + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}},$$

$$P_3 = \frac{\dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}{1 + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}}.$$

# §2　生、灭过程

我们已经看到：根据系统状态图很容易列出哥尔莫可尔夫方程、状态概率的代数方程，求得极限概率。如果把系统状态图变换成生、灭图，那就为简单排队问题建立数学模型提供了方便。设图（6.6）为生、灭图。它的特点是，系统的所有状态可看作一条链，链的中间环节（状态）$S_1$，$S_2$，…，$S_{n-1}$用正、反方向的箭头线与左、右相邻的环节（状态）连接起来，系统的端点状态：$S_0$和$S_n$只与一个相邻状态连接（见图6.6）。生、灭图的名称来源于人口普查。

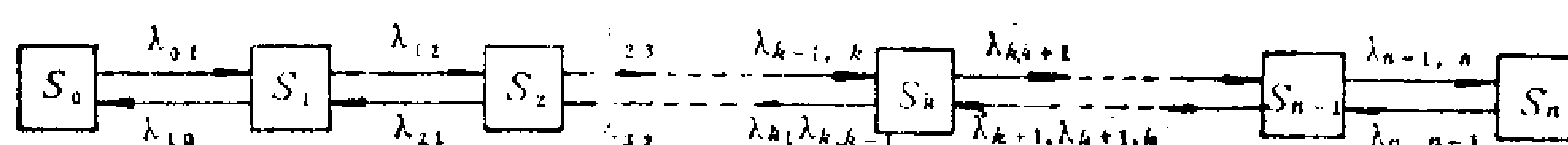



图6.6

设作用于系统$S$的所有事件流（按图（6.6）中箭头线方向运动）都是最简单流，或者说，贯穿系统$S$过程的是最简单流。

根据生、灭图（6.6），系统中每个状态都能够转移到其余任何一个状态，且系统的状态数是有限的，因而有极限概率存在。根据系统状态平衡的原理列出图（6.6）中各状态的代数方程。

对$S_0$有　$\lambda_{01}P_0=\lambda_{10}P_1$.　　　　(6.1)

对$S_1$有　$(\lambda_{12}+\lambda_{10})P_1=\lambda_{01}P_0+\lambda_{21}P_2$.　　　　(6.2)

把（6.1）代入（6.2），得

$$(\lambda_{12}+\lambda_{10})P_1=\lambda_{10}P_1+\lambda_{21}P_2,$$

或　$\lambda_{12}P_1=\lambda_{21}P_2$.　　　　(6.3)

用同样的方法可列出

$$\lambda_{23}P_2=\lambda_{32}P_3.$$

或通式：$\lambda_{k-1,k}P_{k-1}=\lambda_{k,k-1}P_k$，$k=0$，1，…，$n$。　　(6.4)

因此，极限概率满足下列方程组：

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_{01}P_0=\lambda_{10}P_1,\\ \lambda_{12}P_1=\lambda_{21}P_2\\ \cdots\\ \lambda_{k-1,k}P_{k-1}=\lambda_{k,k-1}P_k,\\ \cdots\\ \lambda_{n-1,n}P_{n-1}=\lambda_{n,n-1}P_n\end{array}\right\}\tag{6.5}$$

还有正则条件　$P_0+P_1+\cdots+P_n=1$。　　(6.6)

解这些方程，自（6.5）中的第一个方程式开始，

$$P_1=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}P_0.\tag{6.7}$$

把（6.7）代入（6.5）中的第二个方程式，得

$$P_2=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}}P_1=\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0.\tag{6.8}$$

把（6.8）代入（6.5）中的第三个方程式，得

$$P_3=\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{32}\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0.\tag{6.9}$$

通式为　$P_k=\dfrac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0$。

认真看一下通式，当$k=2-n$时，都是适用的。通式中分子是图（6.6）中的箭头线自左向右的所有$k$个流的强度的乘积；分母是图（6.6）中的箭头线自右向左的全部流的强度之积。因此，所有概率$P_0$，$P_1$，…，$P_n$可以通过其中一个概率$P_0$表达出来。并把它们代入正则条件（6.6），得：

$$P_0+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}P_0+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0+\cdots$$

$$+\frac{\lambda_{k-1,k}\lambda_{k-2,k-1}\cdots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\lambda_{k-1,k-2}\cdots\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0+\cdots$$

$$+\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{10}}P_0=1,$$

或 $$P_0=\left[1+\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}+\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}+\cdots+\frac{\lambda_{k-1,k}\cdots\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\cdots\lambda_{10}}+\cdots+\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{10}}\right]^{-1}. \tag{6.10}$$

其余概率都通过$P_0$表达：

$$\left.\begin{aligned}
P_1&=\frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}P_0,\\
P_2&=\frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}P_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
P_k&=\frac{\lambda_{k-1,k}\cdots\lambda_{01}}{\lambda_{k,k-1}\cdots\lambda_{10}}P_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
P_n&=\frac{\lambda_{n-1,n}\cdots\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\cdots\lambda_{10}}P_0.
\end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

公式（6.10）和（6.11）在求解排队问题时十分有用。

**例题6.3** 求如下生、灭图的极限概率。

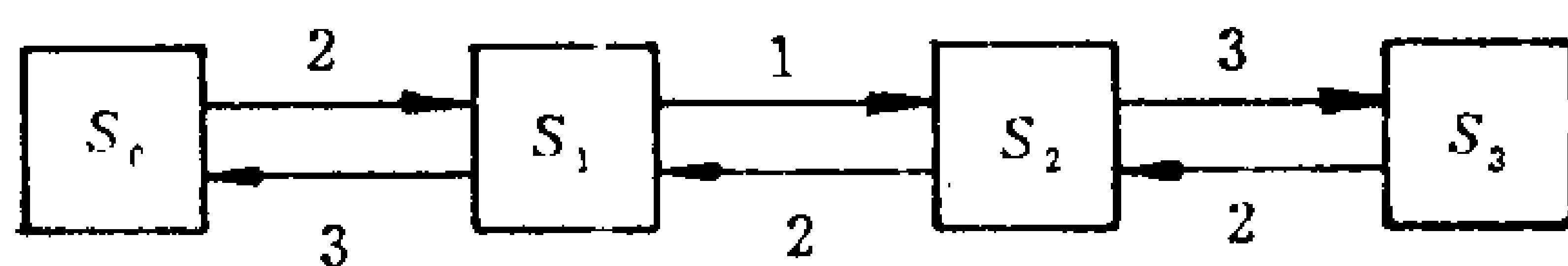



图6.7

**解** 根据公式（6.10）有

$$P_0=\left[1+\frac{2}{3}+\frac{2\times1}{3\times2}+\frac{2\times1\times3}{3\times2\times2}\right]^{-1}=\frac{2}{5},$$

$$P_1=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15};\qquad P_2=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15};$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

## §3 循环过程

设贯穿系统的流是最简单流，或者说系统服务过程是马尔可夫随机过程．所谓循环过程就是单向运行、首尾相联的过程，如图所示。

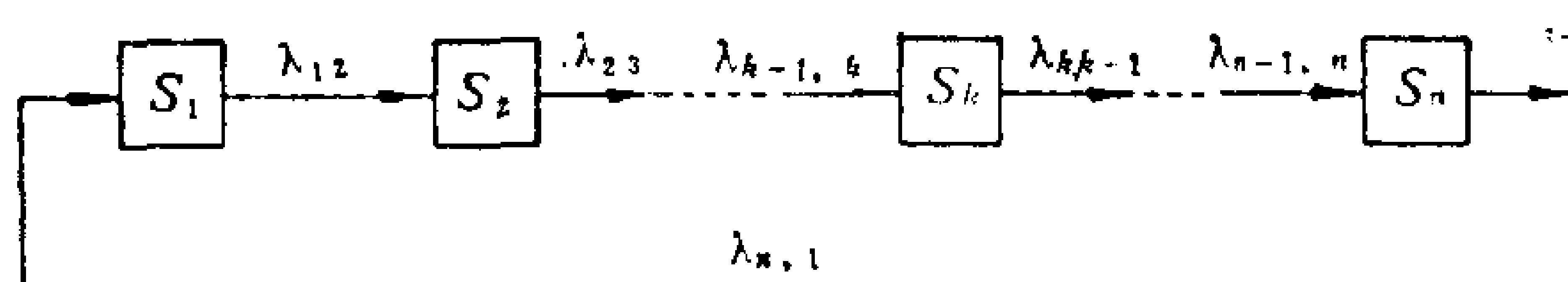


图6.8

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程一般法则，我们直接写出极限概率的代数方程：

$$\lambda_{12}P_1 = \lambda_{23}P_2,$$

$$\lambda_{23}P_2 = \lambda_{34}P_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{k-1,k}P_{k-1} = \lambda_{k,k+1}P_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n-1,n}P_{n-1} = \lambda_{n,1}P_n,$$

$$\lambda_{n,1}P_n = \lambda_{12}P_1.$$

还有正则条件，$P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$。

由上面的方程组可得

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}}P_1,$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}}P_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{23}\lambda_{34}}P_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}}P_1,$$

$$P_4 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{45}}P_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_k = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k,k+1}} P_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n,1}} P_1.$$

把它们代入正则条件方程式得

$$P_1 + \lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{n,1}}\right) P_1 = 1,$$

$$\therefore \quad P_1 = \frac{1}{1 + \lambda_{12}\left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{n,1}}\right)}, \tag{6.12}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} P_1,$$

$$P_3 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} P_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_k = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k,k+1}} P_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n1}} P_1.$$

**至此，我们求到了循环过程的极限状态概率。我们把它转换成便于记忆的形式，即把强度$\lambda_{ij}$转化成在状态$S_i$的平均逗留时间：即**

$$\bar{t}_i \ (i=1, \cdots, n).$$

事实上，由状态$S_i$只发出一个方向的箭头线。令系统$S$处于状态$S_i$，求在该状态逗留时间的数学期望。因为过程是马尔可夫型的，所以，逗留时间无后效性。即不论在该状态已经逗留多长时间，剩余的逗留时间仍然服从指数分布。所以，

$\bar{t}_i=\frac{1}{\lambda_{i,i+1}}$。或$\lambda_{i,i+1}=\frac{1}{\bar{t}_i}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$。

当$i=n$时，$\lambda_{n,1}=\frac{1}{\bar{t}_n}$

把它们代入极限状态概率方程式，得

$$P_1=\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\cdots+\bar{t}_n},$$

$$P_2=\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\cdots+\bar{t}_n},$$

…………

$$P_n=\frac{\bar{t}_n}{\bar{t}_1+t_2+\cdots+\bar{t}_n},$$

或 $$P_k=\frac{\bar{t}_k}{\sum_{i=1}^{n}\bar{t}_i}\quad(k=1,\cdots,n)。\tag{6.13}$$

即循环过程系统的极限状态概率等于每个状态所处的平均逗留时间与系统总的逗留时间之比。

**例题6.4** 电子计算机可能处于下列状态：

$S_1$—正常工作；

$S_2$—不正常工作，停机；寻找原因；

$S_3$—逻辑性不正常，进行修理；

$S_4$—修复启用。

如果系统所有事件流都是最简单流。电子计算机无故障工作的平均时间为0.5（昼夜），停机修理需时6小时，寻找毛病的平均时间0.5小时，修理完毕准备启用平均需要1小时，求极限状态概率。

**解** 电子计算机系统状态生、灭图如下图所示；若电子计算机已处于极限平稳状态：

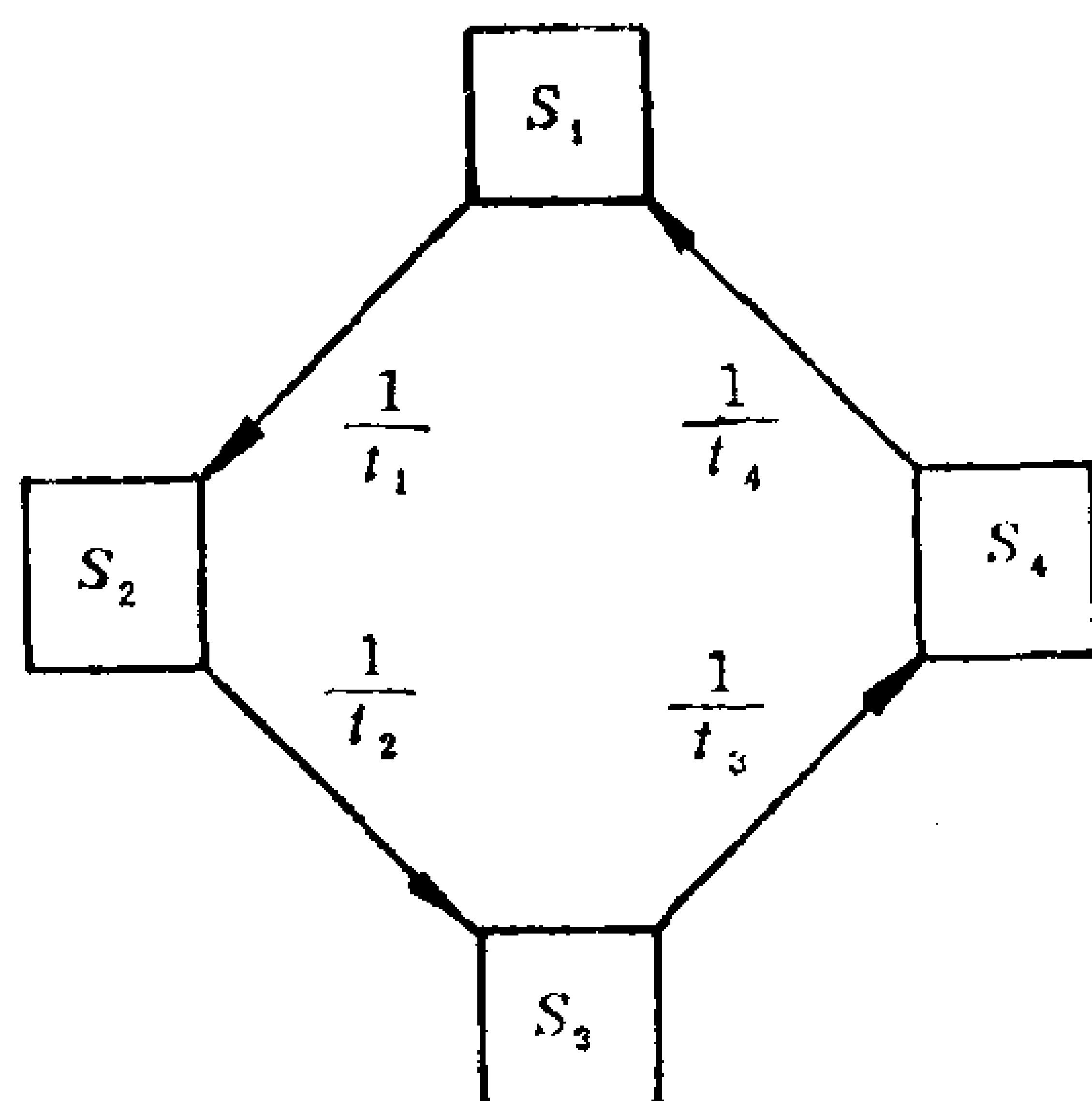


图6.8′

$\bar{t}_1 = 0.5$，$\bar{t}_2 = \frac{1}{48}$，

$\bar{t}_3 = \frac{1}{4}$，$\bar{t}_4 = \frac{1}{24}$（昼夜）

按公式 $P_k = \frac{\bar{t}_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{t}_i}$ 可求：

$P_1 = \frac{24}{39}$；　$P_2 = \frac{1}{39}$；

$P_3 = \frac{12}{39}$；　$P_4 = \frac{2}{39}$。

**例题6.5** 电子计算机可能有下列状态：

$S_1$—正常工作；

$S_2$—不正常工作，停机，寻找原因；

$S_3$—毛病不大，可以就地修复；

$S_4$—毛病很大，需要专家处理；

$S_5$—修复启用。

设电子计算机上述过程是马尔可夫随机过程。机器正常工作的平均时间为 $\bar{t}_1$；寻找毛病的原因平均需要 $\bar{t}_2$ 时间；就地修理平均时间 $\bar{t}_3$；专家修理平均时间 $\bar{t}_4$。修服启用平均时间 $\bar{t}_5$。

如果就地修理的概率为 $\mathscr{P}$，专家修理的概率为 $1-\mathscr{P}$，劳动工资每小时$k$元。

求极限状态概率，修理费用。

**解** 系统状态转移图如下图所示：

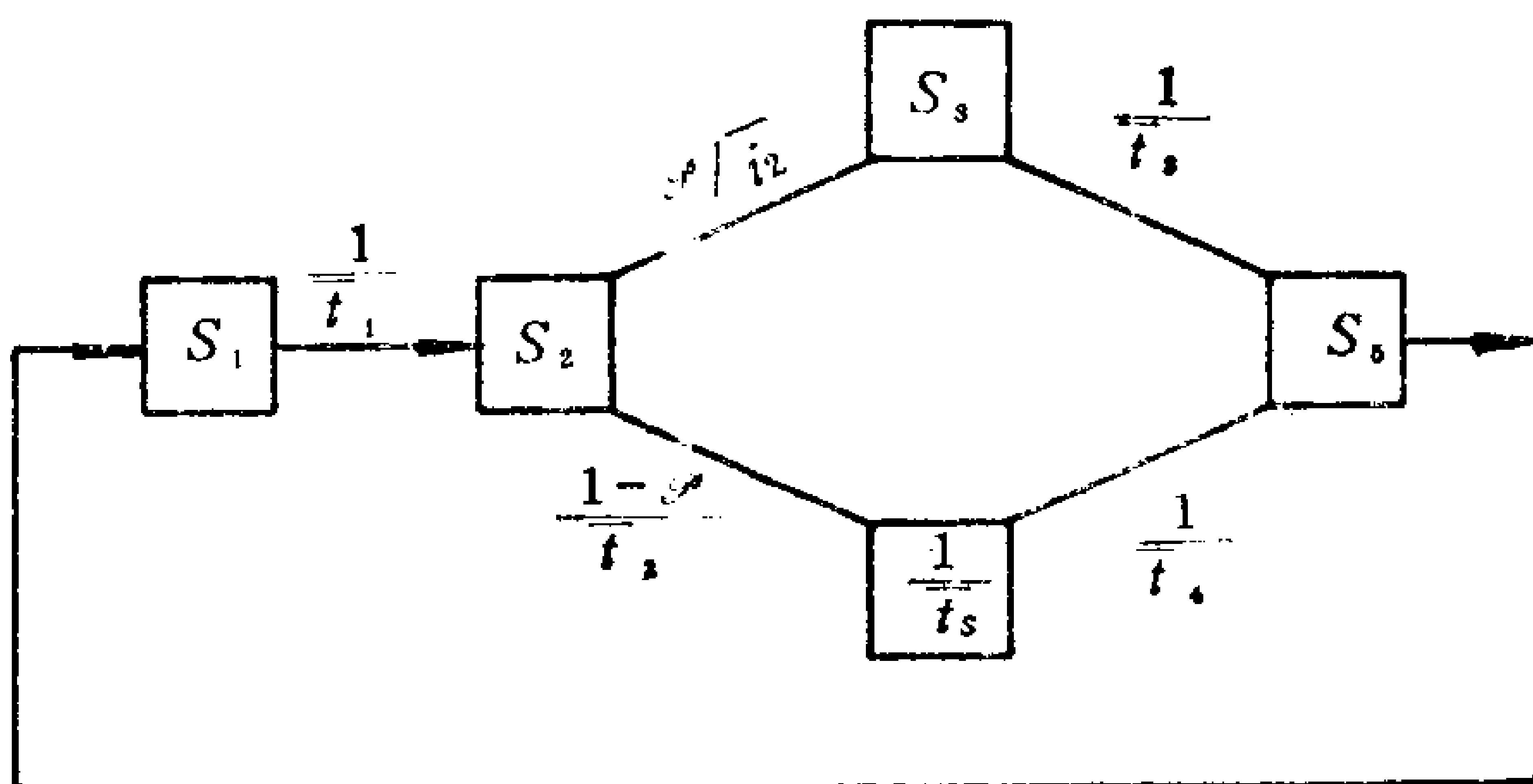



图6.9

根据建立哥尔莫可尔夫方程一般法则可以直接写出：

$$\frac{1}{\bar{t}_1}p_1=\frac{1}{\bar{t}_2}p_2,$$

$$\frac{\mathscr{P}}{\bar{t}_2}p_2=\frac{1}{\bar{t}_3}p_3,$$

$$\frac{1-\mathscr{P}}{\bar{t}_3}p_2=\frac{1}{\bar{t}_4}p_4,$$

$$\frac{1}{\bar{t}_3}p_3+\frac{1}{\bar{t}_4}p_4=\frac{1}{\bar{t}_5}p_5,$$

$$\frac{1}{\bar{t}_5}p_5=\frac{1}{\bar{t}_1}p_1.$$

还有正则条件　$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$。

我们舍掉第四个最复杂的方程式，其余方程通过$p_1$表达出来，得：

$$p_2=\frac{\bar{t}_3}{\bar{t}_1}p_1,$$

$$p_3=\frac{\mathscr{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_2}p_2=\frac{\mathscr{P}}{\bar{t}_2}\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1}p_1=\frac{\mathscr{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1}p_1,$$

$$p_4=\frac{(1-\mathscr{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_2}p_2=\frac{(1-\mathscr{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_2}\cdot\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1}p_1$$

$$=\frac{(1-\mathscr{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1},$$

$$p_5=\frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1}p_1.$$

代入正则方程，得

$$p_1\left(1+\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1}+\frac{\mathscr{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1}+\frac{(1-\mathscr{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1}+\frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1}\right)=1,$$

$$\therefore \qquad p_1=\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\mathscr{P}\bar{t}_3+(1-\mathscr{P})\bar{t}_4+\bar{t}_5},$$

$$p_2=\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\mathscr{P}\bar{t}_3+(1-\mathscr{P})\bar{t}_4+\bar{t}_5},$$

$$p_3=\frac{\mathscr{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\mathscr{P}\bar{t}_3+(1-\mathscr{P})\bar{t}_4+\bar{t}_5},$$

$$p_4=\frac{(1-\mathscr{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\mathscr{P}\bar{t}_3+(1-\mathscr{P})\bar{t}_4+\bar{t}_5},$$

$$p_5=\frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\mathscr{P}\bar{t}_3+(1-\mathscr{P})\bar{t}_4+\bar{t}_5}.$$

需要专家修理的概率为$p_4$。因而需要费用为

$$c=kp_4. \tag{6.14}$$

## §4 李太勒公式

下面我们来推导一个非常重要的公式：在极限平稳状态下，

排队服务系统内顾客平均数 $L_{系}$ 和顾客在系统内平均停留时间 $W_{系}$之间的关系。

任何排队系统（单通道、多通道，马尔可夫型、非马尔可夫型，排队长度有限和无限）和它有关的两个事件流：输入流和输出流，在极限平稳状态时，单位时间内，到达顾客的平均数等于离去顾客的平均数．两个事件流具有相等的强度$\lambda$。

设$x(t)$—在时刻$t$以前到达的顾客数；

$y(t)$—在时刻$t$以前离去的顾客数．

它们都是随机函数．顾客的来、去是整个的，即系统状态的变化是跳跃式进行的．函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 如图(6.10)所示。显然，在任何时刻$t$，它们之差$z(t)=x(t)-y(t)$是系统内的顾客数。当$x(t)$和$y(t)$两条线合在一起时，在系统内就没有顾客（见图6.10）

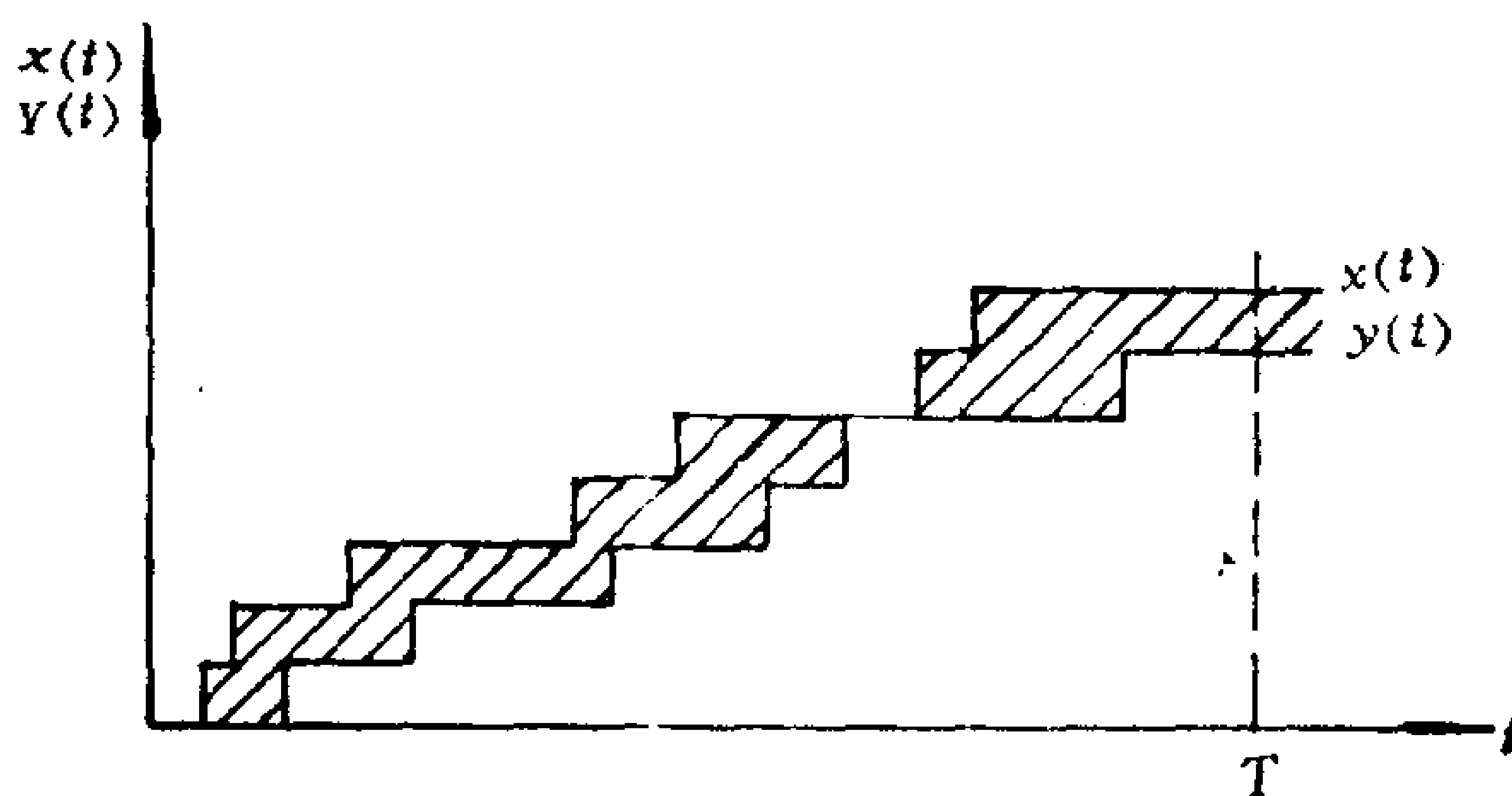



图6.10

设足够长的时间$T$，并计算在$T$时间内的顾客平均数。它将等于函数$z(t)$在该段时间内的积分，并用$T$除：

$$L_{系}=\frac{1}{T}\int_0^T z(t)dt. \qquad (6.15)$$

积分表示图(6.10)中阴影部分的面积．图(6.10)是由很多

长方形组成的。每个长方形的高等于1，其底边等于相应为第一、第二，…，个顾客在系统内的停留时间，用$t_1, t_2, \cdots$，表示。在$T$的末端某些长方形超出阴影部分，当$T$足够大时，这些微量，无关大局。因此可以考虑为

$$\int_0^T z(t)dt = \sum_i t_i. \tag{6.16}$$

式中$\sum\limits_i$表示在$T$时间内所有到达的顾客。

在公式(6.16)的等号两边同除$T$得

$$\frac{1}{T}\int_0^T z(t)dt = \frac{1}{T}\sum_i t_i,$$

即

$$L_{系} = \frac{1}{T}\sum_i t_i. \tag{6.17}$$

在公式(6.17)中，分子、分母同乘一个强度$\lambda$：

$$L_{系} = \frac{1}{\lambda T}\sum_i t_i\lambda. \tag{6.18}$$

式中 $\lambda T$—在$T$时间内，到达顾客的平均数；

$\sum\limits_i t_i$—顾客在系统内停留的总时间；

$\dfrac{\sum\limits_i t_i}{\lambda T}$—在$T$时间内，顾客的平均停留时间，记作$W_{系}$。

∴

$$L_{系} = \lambda W_{系}, \tag{6.19}$$

或

$$W_{系} = \frac{L_{系}}{\lambda}. \tag{6.20}$$

这就是著名的李太勒公式：对任何排队服务系统，在任何顾客到达流和任何服务时间、任何服务规则的情况下，顾客在系统内的平均停留时间等于系统内顾客的平均数用顾客到达强度去除，〔1〕。

用完全一样的方法可以导出李太勒第二个公式：顾客平均

排队时间与排队顾客平均数之间的关系：

$$W_{队}=\frac{1}{\lambda}L_{队}. \qquad (6.21)$$

为推导公式(6.21)，只要把图(6.10)中$y(t)$换成$u(t)$，它表示在时刻$t$以前，从排队队列中离去的顾客数(如果顾客到达时，没有排队，立即得到服务，可以看作，顾客参加排队，但它的排队时间为零)。

# 第七章　排队模型

本章主要讨论马尔可夫随机过程，哥尔莫可尔夫方程，生、灭图和李太勒公式在建立排队模型，推导系统状态极限概率和服务系统运行指标中的应用。

在本章我们研究最简单的排队模型．即顾客到达流是最简单流或顾客到达间隔时间为负指数分布．服务时间为负指数分布．或者说，我们先讨论马尔可夫随机过程的排队问题．本章的第二部分讨论非马尔可夫过程的某些排队问题．

## （一）马尔可夫过程的排队模型

### §1　单通道损失制$(M\mid M\mid 0)$

单通道损失制系统是最简单的经典问题之一．设系统内只有一个服务员$(n=1)$，顾客按泊松流来到服务系统，到达强度为$\lambda$，一般与时间有关

$$\lambda=\lambda(t) \tag{7.1}$$

顾客到达时，服务员不空．顾客立即离去，另求服务．服务时间$T_{服}$服从指数分布，其强度为$\mu$．

$$f(t)=\mu e^{-\mu t},\ (t>0). \tag{7.2}$$

由此可见，服务流是最简单流。

需要确定：

1）系统的绝对通过能力$A$；

2）系统的相对通过能力$Q$。

因为系统内只有一个服务员，所以这种系统只有两种可能状态：

$S_0$—服务员空着；

$S_1$—服务员正在为顾客服务(忙着)。

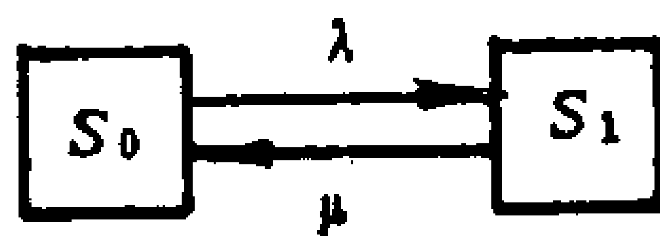



图7.1

系统状态转移图如图7.1所示。

自系统状态$S_0$转移到$S_1$，这显然是由于顾客到达流的作用。自$S_1 \to S_0$是由于服务流作用的结果。

对任何时间$t$，系统状态概率$p_0(t)$和$p_1(t)$有如下关系：

$$p_0(t)+p_1(t)=1。\tag{7.3}$$

根据建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则(见第六章§1）我们有：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_0}{dt}&=-\lambda p_0+\mu p_1,\\ \frac{dp_1}{dt}&=-\mu p_1+\lambda p_0.\end{aligned}\right\}\tag{7.4}$$

方程(7.4)中有一个方程式是多余的。因为$p_0$和$p_1$间的关系是由(7.3)确定了的。因而，我们舍掉(7.3)中第二个方程式，而在第一个方程式中的$p_1=1-p_0$。代入得

$$\frac{dp_0}{dt}=-\lambda p_0+\mu(1-p_0),$$

或
$$\frac{dp_0}{dt}=-(\mu+\lambda)p_0+\mu.\tag{7.5}$$

当初始条件：$p_0(0)=1$，$p_1(0)=0$(开始时，服务员空着)，解(7.5）这个线性微分方程，只有一个未知函数$p_0$，不仅对$\lambda=$

const时，而且对$\lambda=\lambda(t)$时都很方便。我们考虑$\lambda=\text{const}$的情况：

$$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{7.6}$$

$p_0$和时间$t$的关系如图(7.2)所示。在初始时刻($t=0$)服务员空着($p_0(0)=1$)。随着时间$t$的增加概率$p_0$减少，并在极限时($t\to\infty$)，$p_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$。

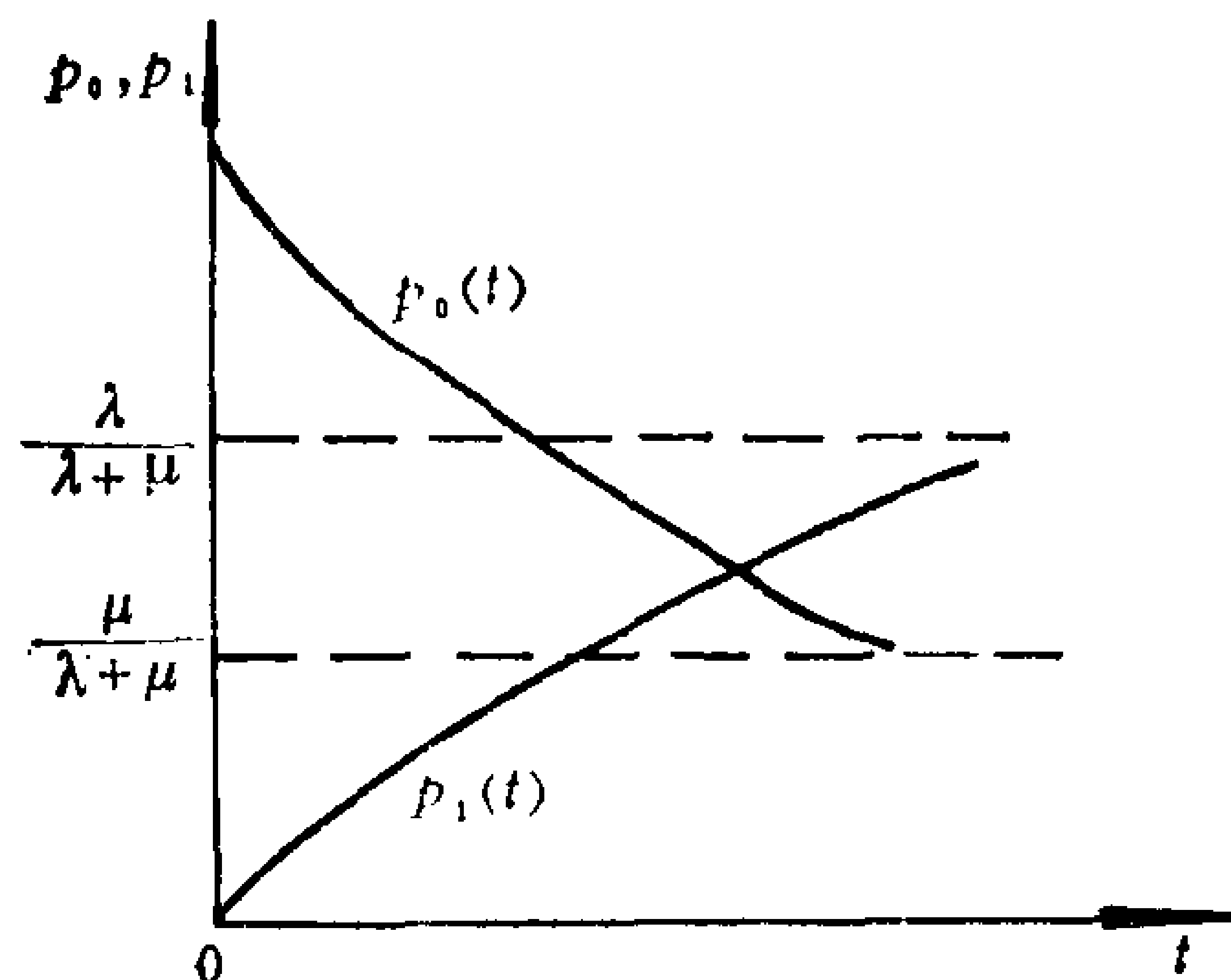



图7.2

不难发现，单通道损失制系统$p_0$就是系统的相对通过能力$Q$。

事实上，$p_0$是在$t$时刻，系统处于空闲状态的概率。即在给定时刻$t$，被服务的顾客数与请求服务的顾客数之比，即$Q=p_0$。

在极限状态，当$t\to\infty$时，即服务过程达到平稳状态。相对通过能力的极限值

$$Q=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{7.7}$$

有了相对通过能力，即可求绝对通过能力

$$A=\lambda Q \tag{7.8}$$

在极限状态，$t\to\infty$，绝对通过能力

$$A=\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \tag{7.9}$$

有了相对通过能力$Q$(顾客到达时，系统空着的概率）很容易求到损失的概率.

$$p_{损}=1-Q. \tag{7.10}$$

损失的概率就是当$t\to\infty$时，请求服务的顾客中没有得到服务的顾客的百分比.

$$p_{损}=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{7.11}$$

由公式(7.11)可见，系统损失的概率等于服务员被占用的概率$p_1$.

**例题7.1** 一条电话线，平均每分钟有0.8次呼唤，即$\lambda=0.8$. 如果每次通话时间平均为1.5分钟，求该条电话线的相对通过能力和绝对通过能力、损失概率、并比较实际通过能力与额面(最大)通过能力.

**解** 我们先确定服务流的参数.

$$\mu=\frac{1}{\bar{t}_{服}}=\frac{1}{1.5}=0.667.$$

系统负荷水平：$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{0.8}{0.667}=1.2.$

电话线相对通过能力

$$Q=\frac{1}{1+\rho}=\frac{1}{1+1.2}=0.455,$$

即在平稳状态时有45%的呼唤得到服务.

电话线的绝对通过能力

$$A=\lambda Q=0.8\times0.455=0.364(次),$$

即电话线每小时($60\times0.364=22$)能接通22次呼唤，或者说，电话线每分钟平均有0.364次呼唤能够接通.

电话线损失概率：

$$p_{损}=1-Q=1-0.455=0.545.$$

即有55%的呼唤不能接通.

电话线的额面（最大）通过能力：

$$Q_{额}=\frac{1}{\bar{t}_{服}}=\frac{1}{1.5}=0.667,$$

或 $$Q_{额}=60\times0.667=40\text{次/时}.$$

即每小时平均能接通40次呼唤．由此可见，顾客流的随机性对系统通过能力有很大影响．

## §2 多通道损失制（$M|M|n|0$）

设服务系统配备 $n$ 个服务员，当所有服务员都正在为顾客服务时，顾客来到服务系统，系统不予服务，顾客立即离去，另求服务．系统可能状态为

$S_0$—所有$n$个服务员都闲着，即系统内没有顾客；

$S_1$—有一个服务员正在为顾客服务，有$n-1$个服务员闲着；即系统内只有一个顾客；

……

$S_k$—有$k$个服务员正在为$k$个顾客服务，有$n-k$个服务员闲着；即系统内有$k$个顾客；

……

$S_n$—所有$n$个服务员都在为顾客服务，即系统内有$n$个顾客．服务系统的状态转移图如（7.3）所示．

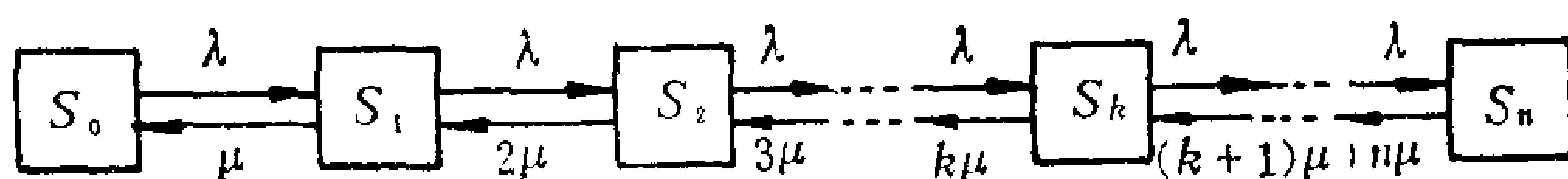



图7.3

图(7.3)中，箭头线自左向右是贯穿系统的顾客流，其强度为$\lambda$。如果系统处于$S_k$状态(有$k$个服务员正在为$k$个顾客服务)。当有新的顾客到来时，系统状态转移到$S_{k+1}$。

我们确定事件流(自右向左贯穿系统)的强度。设系统处于状态$S_1$(有一个服务员正在为顾客服务)。当该服务员一旦服务完毕，系统立刻转移到状态$S_0$，即事件流自$S_1 \to S_0$，这时具有的强度为$\mu$。如果有两个服务员在服务，其中任一个服务员服务完毕，系统立刻转移到状态$S_1$，服务流自$S_2 \to S_1$，这时服务强度为$2\mu$；…；当有$k$个服务员正为$k$个顾客服务时，服务强度为$k\mu$。

根据系统状态转移图，按一般规则，可以直接写出哥尔莫可尔夫状态概率方程。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu p_1, \\
&\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda+\mu)p_1 + \lambda_1 p_0 + 2\mu p_2, \\
&\cdots\cdots \\
&\frac{dp_k}{dt} = -(\lambda+k\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \\
&\cdots\cdots \\
&\frac{dp_n}{dt} = -n\mu p_n + \lambda p_{n-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (7.12)$$

求解方程组(7.13)的初始条件为：

$$p_0(0)=1;\ p_1(0)=p_2(0)=\cdots=p_n(0)=0$$

(开始时，服务员都闲着)。

对方程组(7.13)积分可成为分析性形式，一般可以用电子计算机实现。求得的状态概率(时间函数)：

$$p_0(t);\ p_1(t);\ \cdots;\ p_k(t),\ \cdots,\ p_n(t).$$

实际上，我们感兴趣的是状态的极限概率：

$$p_0,\ p_1,\ \cdots,\ p_k,\ \cdots,\ p_n.$$

由系统状态转移图(7.3)可知，系统的每一个状态都能够转到其余任何一个状态，且系统的状态数是有限的，因而有极限概率存在。根据系统状态平衡的原理可以直接列出图 (7.3)中各状态的代数方程。

对$S_0$有　$\lambda p_0=\mu p_1$，$p_1=\dfrac{\lambda}{\mu}p_0=\rho p_0$，这里，$\dfrac{\lambda}{\mu}=\rho$。

对$S_1$有　$\lambda p_1=2\mu p_2$，　$p_2=\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2\dfrac{p_0}{2!}=\dfrac{\rho^2}{2!}p_0$。

对$S_2$有　$\lambda p_2=3\mu p_3$，　$p_3=\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^3\dfrac{p_0}{3!}=\dfrac{\rho^3}{3!}p_0$。

……

对$S_k$有　$\lambda p_{k-1}=(k+1)\mu p_k,\ p_k=\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\dfrac{p_0}{k!}=\dfrac{\rho^k}{k!}p_0$。

……，

对$S_{n-1}$有　$\lambda p_{n-1}=n\mu p_n$，　$p_n=\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\dfrac{p_0}{n!}=\dfrac{\rho^n}{n!}p_0$。

根据正则条件：$p_0+p_1+\cdots+p_k+\cdots+p_n=1$，

或

$$p_0+\frac{\rho}{1!}p_0+\frac{\rho^2}{2!}p_0+\cdots+\frac{\rho^k}{k!}p_0+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}p_0=1,$$

把各项中的$p_0$括出来得

$$p_0\left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^k}{k!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)=1,$$

$$\therefore\qquad p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^k}{k!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{n}\dfrac{\rho^n}{n!}}.\qquad(7.13)$$

因而，$p_1=\rho p_0$；$p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0$，…，$p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0$，… $p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0$。

到此，系统状态的极限概率全数求到。

现在求多通道损失制服务系统的效率指标。

1）系统内所有$n$个服务员都不空闲的概率或损失概率$p_{损}$。即

$$p_{损}=p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0=\frac{\frac{\rho^n}{n!}\cdot e^{-\rho}}{\sum\limits_{n=0}^{m}\frac{\rho^n}{n!}\cdot e^{-\rho}} \tag{7.14}$$

2）系统的相对通过能力

$$Q=1-p_{损}=1-\frac{\rho^n}{n!}p_0 \tag{7.15}$$

3）系统的绝对通过能力

$$A=\lambda Q=\lambda\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right) \tag{7.16}$$

4）占用服务员的平均数，用$\bar{k}$表示。它是损失制服务系统的重要效率指标之一。其值可按下式求得

$$\begin{aligned}
\bar{k}&=0\times p_0+1\times p_1+\cdots+kp_k+\cdots+np_n=\sum_{k=0}^{n}kp_k\\
&=\sum_{k=0}^{n}k\frac{\rho^k}{k!}p_0=\sum_{k=1}^{n}k\frac{\rho^k p_0}{k(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho\rho^{k-1}}{(k-1)!}p_0\\
&=\rho p_0\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}=\rho p_0\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k}{k!}\\
&=\rho p_0\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}-\frac{\rho^n}{n!}\right]\\
&=\rho p_0\left[\frac{1}{p_0}-\frac{\rho^n}{n!}\right]=\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)
\end{aligned}$$

或 $$\bar{k}=\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right).\qquad(7.17)$$

占用通道的平均数$\bar{K}$，也可以通过系统的绝对通过能力$A$表示，因为$A$不是别的，它正是单位时间内，被服务顾客的平均数。一个服务员在单位时间内平均服务$\mu$个顾客。因而，$A$个顾客需要服务员的数目为

$$\bar{K}=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda Q}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$$

或 $$\bar{k}=\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right).\qquad(7.18)$$

4）通道的利用率$\eta$，

$$\eta=\frac{\bar{k}}{n}.\qquad(7.19)$$

**例题7.2** 某电话总机有三条($n=3$）中继线．其余数据同例题（7.1)．试求：系统状态的极限概率、绝对和相对通过能力，损失概率和占用通道的平均数．

**解** 顾客流的换算强度，即系统的负荷水平，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，

∵ $\lambda=0.8$，$\mu=0.667$，　　∴ $\rho=\dfrac{0.8}{0.667}=1.2$。

系统状态的极限概率为：

$p_1=\rho p_0=1.2p_0$（一条通道被占用的概率），

$p_2=\rho^2/2!p_0=0.72p_0$（二条通道被占用的概率），

$p_3=\dfrac{\rho^3}{3!}p_0=0.228p_0$（三条通道被占用的概率），

而 $p_0=\left[1+\rho+\dfrac{\rho^2}{2!}+\dfrac{\rho^3}{3!}\right]^{-1}=0.312$（所有通道都空闲的概率）。

因而 $p_1=1.2\times0.312=0.374$；$p_2=0.72\times0.312=0.224$；

$$p_3 = 0.288 \times 0.312 = 0.090$$

检验：$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0.312 + 0.374 + 0.224 + 0.090 = 1.0$，

系统损失的概率

$$p_{损} = p_3 = 0.090,$$

即有9%的呼唤不能接通。

系统的相对通过能力

$$Q = 1 - p_{损} = 1 - 0.090 = 0.91,$$

即有91%的呼唤可以接通。

系统的绝对通过能力

$$A = \lambda Q = 0.8 \times 0.91 = 0.728,$$

即每分钟内可接通0.728次呼唤。

占用通道的平均数

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{0.728}{0.667} = 1.09.$$

即平均占用1.09条中继线。

通道的利用率

$$\eta = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{1.09}{3} = 0.363.$$

## §3 单通道等待制（M｜M｜1）

排队论中单通道等待制具有特别重要的意义，因为这种排队模型在实际工作中经常遇到。例如：医生诊病，调车驼峰解体车列，电子计算机执行指令等。

本节讨论的等待制系统是这样的：顾客到达间隔时间和服务时间都是指数分布。单位时间内到达的顾客数为$\lambda$；服务强度为$\mu$。系统内只有一个服务员。顾客到达时，服务员不空，顾客参加排队，等待服务。一直等到有服务员为他服务为止。

本模型的生、灭图如图(7.4)所示：

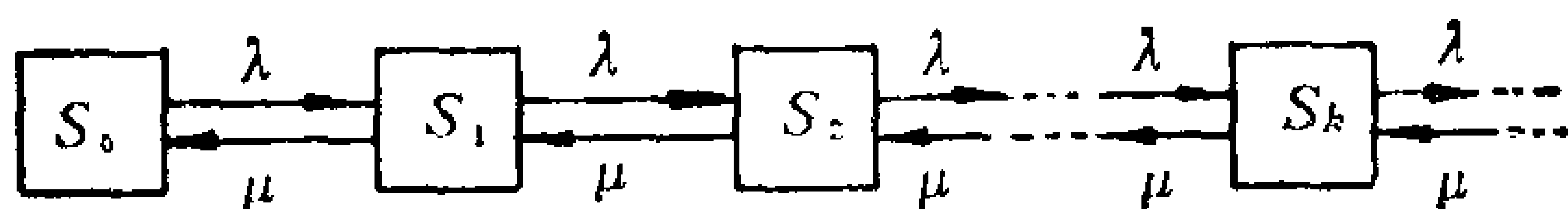



图7.4

须要求系统状态的极限概率和系统的效率指标，为此，列出系统的可能状态。以服务系统中的顾客数表示系统的状态，记作$S_i(i=0,1,2,\cdots)$。

$S_0$—系统中没有顾客，服务员空着；

$S_1$—系统内有一个顾客，服务员正在为顾客服务（忙着），没有顾客排队；

$S_2$—系统内有两个顾客，服务员忙着，有一个顾客排队；

…………………………………………………………

$S_k$—系统内有$k$个顾客，服务员忙着，有$(k-1)$个顾客排队；

…………………………………………………………

如上所述，系统状态数目有限时，极限概率才存在。而我们讨论的系统状态数目是无限的。但可以证明，当$\rho<1$时，极限概率是存在的。当$\rho\geqslant 1$，$t\to\infty$时，排队长度将无限增加。

特别值得提出的是：$\rho=1$。即系统的负荷水平达到100%。或者说，在一个顾客服务的时间内，平均也只有一个顾客来到服务系统。这应该是很好的。来一个，服务一个。实际上，并不如此。当$\rho=1$时，系统内输入的顾客数等于输出的顾客数，只有当顾客均衡到达，服务时间固定不变时，才有可能。这种理想的排队系统，实际上根本不存在。当输入流或服务流稍有不均衡，即有时系统是空闲的，而失去了可用的服务时间，这样损失的时间越多，服务员得空的可能性越小。因而，$P_0(t)$

随时间而变化，达不到极限平稳。

让我们回到单通道等待制问题上来。严格地说，在生、灭图中，当系统状态数目有限时，才有极限概率存在。这与我们讨论的问题有矛盾。但也不必担心，因为我们讨论的排队模型中的$P_0$（服务员空闲的概率）可按下述步骤求得。

根据生、灭图(7.4) 和建立哥尔莫可尔夫代数方程的一般法则，我们有：

对$S_0$有　$\lambda P_0=\mu P_1$，　$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0$　用$\frac{\lambda}{\mu}=\rho$代入

$P_1=\rho P_0$；

对$S_1$有$\lambda P_1=\mu P_2$，　$P_2=\frac{\lambda}{\mu}P_1=\rho^2P_0$；

对$S_2$有　$\lambda P_2=\mu P_3$，　$P_3=\frac{\lambda}{\mu}P_2=\rho^3P_0$；

………，………，……………；

根据正则条件，$P_0+P_1+P_2+\cdots+P_k+\cdots=1$，

或　$P_0+\rho P_0+\rho^2P_0+\cdots+\rho^kP_0+\cdots=1$，

$P_0(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^k+\cdots)=1$。

上式括号中各项之和是几何级数。我们知道，当$\rho<1$时，级数收敛。当$\rho\geqslant1$时，级数发散。这就直接证明了，$\rho<1$时，极限概率$P_0,P_1,\cdots,P_k,\cdots$存在。

我们假定$\rho<1$，则

$$1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^k+\cdots=\frac{1}{1-\rho},$$

因而　$P_0=[1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^k+\cdots]^{-1}=1-\rho$，

或　$P_0=1-\rho$，　(7.20)

从而，极限概率可按下列公式计算：

$P_1=\rho(1-\rho)$，

$P_2=\rho^2(1-\rho)$，

…………

$$P_k=\rho^k(1-\rho),\tag{7.21}$$

…………

这里 $P_0$指服务员闲着的概率，即系统内没有顾客的概率。$P_1$是服务员忙着的概率，即系统内有一个顾客的概率。$P_k$—服务系统内有$k$个顾客的概率。

现在求系统的效率指标：

1）系统内排队顾客的数学期望(平均值)，$L_系$；系统内的顾客数目是随机变数。它的可能取值有0,1，2,…,$k$,…。顾客数目相应的概率为$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_k,\cdots$。因而顾客数目的期望值为

$$L_系=\sum_{k=0}kP_k=0\times P_0+1\times P_1+2\times P_2+\cdots+kP_k+\cdots$$

∵ $$P_k=\rho^k(1-\rho),$$

∴ $$L_系=\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^k(1-\rho)=\rho(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}k\rho^{k-1}.$$

式中，$k\rho^{k-1}$是$\rho^k$中对$\rho$的导数，即

$$L_系=\rho(1-\rho)\sum_{k=0}\frac{d}{d\rho}\rho^k$$

$$=\rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}\rho^k.$$

∵ $$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k=\frac{\rho}{1-\rho}\qquad\frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{1}{(1-\rho)^2},$$

∴ $$L_系=\rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2},$$

或 $$L_系=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}.\tag{7.22}$$

2）顾客在系统内平均逗留时间，$W_{系}$：

根据李太勒公式（见第六章§3）。

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}. \tag{7.23}$$

3）排队顾客的平均数是$L_{队}$。为了求得$L_{队}$，我们作如下讨论：排队的顾客是随机变数，它等于服务系统内顾客数目的数学期望减去正在被服务的顾客数目的数学期望。即

$$L_{队}=L_{系}-L_{服}. \tag{7.24}$$

式中　$L_{服}$是正在被服务的顾客数目的期望值。

正在被服务的顾客数或者等于零（通道空着）或者等于1（通道被占着），这时随机变数的数学期望值等于通道被占着的概率($P_{占}$)。显然，

$$P_{占}+P_0=1,$$

或

$$P_{占}=1-P_0=\rho, \tag{7.25}$$

即正在被服务的顾客数目的期望值

$$L_{服}=\rho. \tag{7.26}$$

从而

$$L_{队}=L_{系}-L_{服}=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho},$$

或

$$L_{队}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}. \tag{7.27}$$

4）顾客平均排队时间$W_{队}$。根据李太勒公式

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{7.28}$$

5）系统内有多于一个顾客的概率$P(>1)$。

$$P(>1)=1-P_0-P_1=1-(1-\rho)-\rho(1-\rho)=\rho^2.$$

6）系统内有多于$m$个顾客的概率$P(>m)$。

$$P(>m)=1-\sum_{k=0}^{m}P_k=1-(1-\rho^{m+1})=\rho^{m+1}. \tag{7.29}$$

7）系统内顾客数目的方差 $D(L_系)$。根据方差的定义：

$$D(L_系)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-L_系)^2 P_k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k^2-2kL_系+L_系{}^2)P_k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P_k-2L_系\sum_{k=0}^{\infty}kP_k+L_系{}^2\sum_{k=0}^{\infty}P_k.$$

∵ $$P_k=\rho^k(1-\rho);\quad \sum_{k=0}^{\infty}P_k=1;\quad \sum_{k=0}^{\infty}kP_k=L_系,$$

∴ $$D(L_系)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\rho^k(1-\rho)-2L_系{}^2+L_系{}^2$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\rho^k(1-\rho)-L_系{}^2$$

$$=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}k^2\rho^k-L_系{}^2.$$

∵ $$\sum_{k=0}^{\infty}k^2\rho^k=\rho(1+4\rho+9\rho^2+\cdots+k^2\rho^{k-1}+\cdots)$$

$$=\frac{1+\rho}{(1-\rho)^3},$$

$$L_系{}^2=\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

∴ $$D(L_系)=\rho(1-\rho)\frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}-\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{(1-\rho)^2},$$

或 $$D(L_系)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2},\qquad (7.30)$$

∴ $$\sigma(L_系)=\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}.\qquad (7.31)$$

系统内顾客数目的偏离系数 $v(L_系)$

$$v(L_{系})=\frac{\sigma(L_{系})}{L_{系}}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}.$$

∵ $\rho<1$， ∴ $v(L_{系})>1$.

即系统内顾客数目有很大的波动。

8）排队顾客数目的方差$D(L_{队})$。根据方差定义：

$$D(L_{队})=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2P_k-L_{队}{}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P_k-2\sum_{k=1}^{\infty}kP_k+\sum_{k=1}^{\infty}P_k-L_{队}{}^2$$

$$=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}+\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}-\frac{2\rho}{1-\rho}$$

$$+\rho-\left[\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}\right]^2$$

$$=\frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}$$

或
$$D(L_{队})=\frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}. \tag{7.32}$$

现在我们求顾客排队等待服务的表达式。

设$T_{队}$是系统内第$n+1$个顾客的排队等待服务时间（随机变数）.当某个顾客到达时，系统内已经有$n$个顾客。经过$t$时间后，系统内$n$个顾客都被服务完毕。因为服务时间是指数分布，它具有无后效性，因此，当第$n$个顾客到达时，正在被服务的顾客，余下的服务时间仍是相同的指数分布.我们可以把$n$个顾客被服务完毕所需要的时间看作$n$级爱尔朗分布；并且可以看作$n$个顾客服务的时间$t$等价于第$n+1$个顾客的排队等待时间，即$T_{队}\leqslant t$。为第$n+1$个顾客的服务时间的概率密度为

$$f\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{t^n e^{-\mu t}\mu^{n+1}}{n!}.$$

式中 $t$—是$T_{队}$的具体值

而 $$f_{T_{队}}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f\left(\frac{t}{n}\right)\cdot P_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n e^{-\mu t}\mu^{n+1}}{n!}\rho^n(1-\rho)$$

$$=(1-\rho)\mu e^{-\mu t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^n\rho^n}{n!}.$$

因为 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu t)^n}{n!}\rho^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}=e^{-\lambda t},$$

所以 $$f_{T队}(t)=\mu(1-\rho)e^{-(\mu-\lambda)t}\quad t>0,$$

或 $$f_{T队}(t)=\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}\quad t>0.$$

可见，$f_{T队}(t)$也服从指数分布。

现在可以求顾客平均排队时间$W_{队}$。

$$W_{队}=\int_0^{\infty}tf_{T队}(t)dt=\int_0^{\infty}t\rho(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt.$$

即 $$W_{队}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

8）顾客排队等待时间的方差$D(W_{队})$。根据方差定义

$$D(W_{队})=\int_0^{\infty}t^2f_{T队}(t)dt-W_{队}^2$$

$$=\int_0^{\infty}t^2\rho(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt-W_{队}^2$$

$$=\frac{2\lambda}{\mu(\mu-\lambda)^2}-\left[\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}\right]^2$$

$$=\frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}=\frac{\rho(2-\rho)}{(\mu-\lambda)^2},$$

或 $$D(W_{队})=\frac{\rho(2-\rho)}{(\mu-\lambda)^2}. \tag{7.33}$$

9）顾客排队时间的均方差$\sigma(W_{队})$

$$\sigma(W_{队})=\frac{1}{\mu-\lambda}\sqrt{\rho(2-\rho)}. \tag{7.34}$$

**例题7.3** 铁路编组站，到达场～驼峰系统，改编列车到站

间隔时间服从指数分布，每小时平均到达2列($\lambda=2$)；服务员是驼峰。解体一列车平均20分钟。解体时间是指数分布。车站到达场上有2股道。当到达场满线时，不能接车。这时，列车只能停在机外或前方站。求在平稳状态下，车列平均数$L_{系}$；车列在到达场上的平均停留时间$W_{系}$；待解车列的平均数$L_{队}$。如果车列停在前方站上每个列车小时的费用为$a$元，求列车停在前方站上的损失。

**解** $\lambda=2$，$\bar{t}_{服}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

$\rho=\lambda\bar{t}_{服}=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$。

1）系统内车列的平均数

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2(列)。$$

2）车列在系统内平均停留时间，

$$W_{系}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\frac{2}{3}}{2\times\frac{1}{3}}=1(小时)。$$

3）系统内排队待解车列的平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}(列)$$

4）车列平均待解时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{2}{3}(小时)$$

5）车列停在前方站上的平均时间，即列车平均延误时间，

记作$W_{延}$.

$$W_{延}=P(>2)=1-\sum_{k=0}^{m=2}P_k=\rho^{m+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+1}=0.297(\text{时}).$$

6）停在前方站上的车列的平均数，即延误列车的平均数，$L_{延}$. 根据李太勒公式

$$L_{延}=\lambda W_{延}=2\times 0.297=0.594(\text{列}).$$

7）延误列车费用$E$:

$$E=24\lambda\cdot W_{延}\times a=24\times 2\times 0.297\times a=14.2a\text{元}$$

即每天延误列车费用为$14.2a$元.

## §4　单通道混合制（M｜M｜1｜m）

设系统内有一个服务员($n=1$)，顾客到达间隔时间为指数分布，其强度为$\lambda$；服务时间是指数分布，其强度为$\mu$（在单位时间内，服务员不停地工作平均服务的顾客数目）. 当顾客到达时，服务员不空，顾客参加排队，等待服务. 因为系统内只有$m$个排队位置，所以满座时，顾客立即离去，另求服务. 这是排队长度有限的服务系统.

系统状态生、灭图如图(7.5)所示：

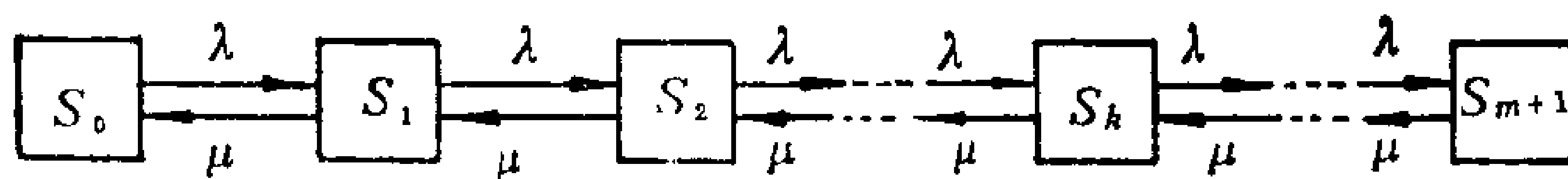



图7.5

系统的可能状态有

$S_0$—服务员闲着，

$S_1$—服务员正在为顾客服务(忙着)，没有顾客排队，

$S_2$—服务员忙着，有一个顾客排队；

……………………………………………………………

$S_k$—服务员忙着，有$k-1$个顾客排队；

……………………………………………………………

$S_{m+1}$—服务员忙着，有$m$个顾客排队。

由图(7.5)可见，由一个状态转移到任何其它状态，且系统的状态数是有限的，所以，极限概率存在。为求极限概率我们根据状态平稳和列哥尔莫可尔夫代数方程的一般法则，我们

对$S_0$有 $\lambda P_0=\mu P_1$， $P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0=\rho P_0$。

对$S_1$有 $\lambda P_1=\mu P_2$， $P_2=\frac{\lambda}{\mu}P_1=\rho^2 P_0$。

对$S_2$有 $\lambda P_2=\mu P_3$， $P_3=\frac{\lambda}{\mu}P_2=\rho^3 P_0$。

……………………………………………

对$S_k$有 $\lambda P_k=\mu P_{k+1}$， $P_{k+1}=\rho^{k+1}P_0$。

……………………………………………

对$S_m$有 $\lambda P_m=\mu P_{m+1}$， $P_{m+1}=\rho^{m+1}P_0$。

还有正则条件：$P_0+P_1+\cdots+P_k+\cdots+P_{m+1}=1$，

即 $P_0+\rho P_0+\rho^2 P_0+\cdots+\rho^k P_0+\cdots+\rho^{m+1}P_0=1$。

∴ $P_0(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^k+\cdots+\rho^{m+1})=1$。

即 $P_0=[1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{m+1}]^{-1}$。

注意到，上式括号中是几何级数，加总可得

$$P_0=\frac{1}{(1-\rho^{m+2})/(1-\rho)}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}。\qquad(7.35)$$

从而，其余状态概率公式为：

$$P_1=\rho P_0，P_2=\rho^2 P_0，\cdots，P_k=\rho^k P_0，\cdots，$$
$$P_{m+1}=\rho^{m+1}P_0。\qquad(7.36)$$

注意到，当$\rho=1$时，$P_0=\frac{0}{0}$，用逻毕达法则

$$1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{m+1}=m+2,$$

$$\therefore \qquad P_0=\frac{1}{m+2}, \quad \rho=1.$$

现在我们求服务系统的效率指标：

1）系统损失的概率，$P_{损}$：当系统满足（服务员忙着，排队位置满座）时，来到的顾客，立即离去，另求服务的概率。

$$P_{损}=P_{m+1}=\rho^{m+1}P_0=\rho^{m+1}\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (7.37)$$

2）系统相对通过能力

$$Q=1-P_{损}=1-\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}. \qquad (7.38)$$

3）系统绝对通过能力

$$A=\lambda Q. \qquad (7.39)$$

4）系统内排队顾客的平均数 $L_{队}$，它是离散随机变数 $R$—排队顾客数目，的数学期望

$$L_{队}=M(R).$$

当系统内有二个顾客时，其概率为 $P_2$，有一个顾客排队．所以排队顾客的平均数为 $1\times P_2$；当系统内有三个顾客时，其中有二个顾客排队而其概率为 $P_3$；所有排队顾客的平均数为 $2P_3$；…；当系统内有$k$个顾客时，其概率为$P_k$，这时排队的顾客有$k-1$个。所以排队顾客的平均数$(k-1)P_k$；…；最后，系统内有$m$个顾客排队时的概率为 $P_{m+1}$。因而，系统内排队顾客的平均数

$$L_{队}=1\times P_2+2P_3+\cdots+(k-1)P_k+\cdots+mP_{m+1}$$
$$=\rho^2P_0+2\rho^3P_0+\cdots+(k-1)\rho^kP_0+\cdots+m\rho^{m+1}P_0.$$

把$\rho^2P_0$括出来：

$$L_{队}=\rho^2P_0(1+2\rho+\cdots+(k-1)\ \rho^{k-2}+\cdots+m\rho^{m-1}].$$

括号中的数可以写成导数式：

$$(\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{k-1}+\cdots+\rho^m)'=\left[\frac{\rho-\rho^{m+1}}{1-\rho}\right]'$$

$$=\frac{[1-(m+1)\rho^m](1-\rho)+(\rho-\rho^{m+1})}{(1-\rho)^2}$$

$$=\frac{1-(m+1)\rho^m-\rho+(m+1)\rho^{m+1}+\rho-\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2}$$

$$=\frac{1-(m+1)\rho^m+m\rho^{m+1}}{(1-\rho)^2}=\frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

因此 $$1+2\rho+\cdots+m\rho^{m-1}=\frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

最后得 $$L_{队}=\rho^2P_0\frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

考虑到 $$P_0=\frac{1-\rho}{(1-\rho^{m+2})},$$

所以 $$L_{队}=\frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}. \tag{7.40}$$

到此，我们导出了排队顾客平均数的计算公式。

5）系统内顾客数目的数学期望

$$L_{系}=L_{队}+L_{服}.$$

式中 $L_{服}$—正在被服务顾客的平均数；

$L_{队}$—系统内排队顾客的平均数（刚刚求到）。我们的问题是求$L_{服}$。正在被服务的顾客数对本系统（$n=1$）来说，只有两种可能：或者服务员闲着，其概率为$P_0$；或者忙着，其概率为$1-P_0$。服务员忙着就是正在为顾客服务。我们已经知道，$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$，因而，$1-P_0=\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}$，

即 $$L_{服}=1-P_0=\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}.$$

从而得 $$L_{系}=L_{队}+\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}. \tag{7.41}$$

6）顾客平均排队时间$W_{队}$.我们先用下述意思去理解$W_{队}$，然后用李太勒公式验证.

设顾客在某个时刻到达服务系统，服务员闲着，其概率为$P_0$.顾客立即被接受服务，或者说，排队时间等于零.当顾客到达时，系统内已经有一个顾客，其概率为$P_1$，服务员正在为先到的顾客服务.顾客参加排队，等待服务.由于服务时间是指数分布，无后效性，所以该顾客平均等待时间仍为$\frac{1}{\mu}$.当顾客到达时，系统内已经有两个顾客，其概率为$P_2$,即一个顾客正被服务，一个顾客在排队.正在排队的顾客平均等待$\frac{1}{\mu}$时间，所以，后到顾客的排队时间为$\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}=\frac{2}{\mu}$.依此类推，当顾客到达时，系统内已经有$k$个顾客，其概率为$P_k$.这时，平均等待时间为$\frac{k}{\mu}$.这里的$k$可以为任意整数，但$k\leqslant m$.当$k=m+1$时怎样呢？即当顾客到达时，系统满员，顾客立即离去，另求服务.或者说，该顾客的等待时间为零.因而，顾客平均排队时间为：

$$W_{队}=P_1\frac{1}{\mu}+P_2\frac{2}{\mu}+\cdots+P_k\frac{k}{\mu}+\cdots+P_m\frac{m}{\mu}$$

把$P_1,P_2,\cdots P_m$的值代入，得：

$$\begin{aligned}W_{队}&=P_0\rho\frac{1}{\mu}+P_0\rho^2\frac{2}{\mu}+\cdots+P_0\rho^k\frac{k}{\mu}\\&\quad+\cdots+P_0\rho^m\frac{m}{\mu}\\&=\frac{P_0\rho}{\mu}[1+2\rho+\cdots+k\rho^{k-1}+\cdots+m\rho^{m-1}].\end{aligned}$$

括号中的数我们已经求到过.

$$\therefore \qquad W_{队} = \frac{P_0 \rho}{\mu} \cdot \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

把$P_0$值代入，得：

$$W_{队} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} \cdot \frac{1-\rho^m(m+1-m\rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}. \qquad (7.42)$$

到此，我们导出了顾客排队等待的平均时间的计算公式。它对吗？我们用李太勒公式验证．根据李太勒公式，

$$W_{队} = \frac{L_{队}}{\lambda}.$$

即

$$W_{队} = \frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})\lambda}$$

$$= \frac{\rho[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{\mu(1-\rho)(1-\rho^{m+2})},$$

即顾客平均排队时间等于排队顾客的平均数除以顾客到达强度

7）顾客在系统内平均逗留时间

$$W_{系} = W_{队} + \bar{t}_{服}.$$

式中 $\bar{t}_{服}$—平均服务时间，

$W_{队}$—平均排队时间．

我们知道，排队时间和服务时间都是随机变数．因而，顾客在系统内的逗留时间也是随机变数

令 $T_{系}$为顾客在系统内的停留时间；

$T_{待}$为顾客排队时间；

$t_{服}$为顾客服务时间．

根据数学期望和的定理，有

$$M(T_{系}) = M(T_{待}) + M(t_{服}).$$

或 $M(T_{待}) = W_{队}$，而$M(t_{服}) = Q\bar{t}_{服} = \dfrac{Q}{\mu}$.

从而，得：$W_{系}=W_{队}+\dfrac{Q}{\mu}=\dfrac{L_{队}}{\lambda}+\dfrac{Q}{\mu}$. (7.43)

应该注意：上述公式的推导是以有$m$个排队位置为基础的。

**例题7.4** 某修理站只有一个工人。在修理站内最多只能停三台修理的机器。若需要修理的机器超过三台，则请到别的修理站去。设修理机器到达强度$\lambda=1$，并服从泊松流。修理时间是指数分布，平均修理时间为1.25分钟。试求系统的效率指标。

**解** $\lambda=1$，$\bar{t}_{服}=1.25$，$\rho=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1.25}}=1.25$。$m=3$。

$$\therefore \quad P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}=\frac{1-1.25}{1-1.25^5}=0.122,$$

$$P_1=\rho P_0=1.25\times 0.122=0.152,$$

$$P_2=\rho^2 P_0=1.25^2\times 0.122=0.191,$$

$$P_3=\rho^3 P_0=1.25^3\times 0.122=0.238,$$

$$P_4=\rho^4 P_0=1.25^4\times 0.122=0.297,$$

$$P_{损}=P_4=0.297,$$

$$Q=1-P_{损}=1-0.297=0.703,$$

$$A=\lambda Q=1\times 0.703=0.703.$$

$$L_{队}=\frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}$$

$$=\frac{1.25^2[1-1.25^3(3+1-3\times 1.25)]}{(1-1.25)(1-1.25^5)}$$

$$=1.56(台),$$

$$L_{服}=1-P_0=1-0.12=0.88,$$

$$L_{系}=L_{队}+L_{服}=1.56+0.88=2.44(台),$$

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=1.56(分钟),$$

$$W_{系}=W_{队}+\frac{Q}{\mu}=1.56+\frac{0.703}{0.8}=2.44(分钟).$$

**注** 一般排队论书上都以$(m-1)$个排队长度为限。系统状态转移图如图7.6所示。这时，上述计算公式相应为：

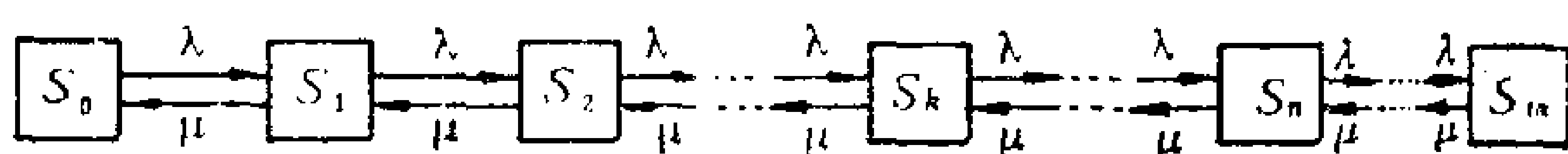



图7.6

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\quad \rho\neq 1.$$

$$P_m=\rho^m P_0=\rho^m\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}.$$

$$L_{系}=\sum_{k=0}^{m}kP_k=\sum_{k=0}^{m}k\rho^k\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}k\rho^k$$

$$=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho\sum_{k=0}^{m}k\rho^{k-1}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho\sum_{k=0}^{m}\frac{d}{d\rho}\rho^k$$

$$=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho}\right)$$

$$=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho\left[\frac{(1-\rho)(-m-1)\rho^m-(-1)(1-\rho^{m+1})}{(1-\rho)^2}\right]$$

$$=\frac{\rho[1+m\rho^{m+1}-(m+1)\rho^m]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+1})}$$

$$=\frac{\rho+[(m+1)-1]\rho^{m+2}-(m-1)\rho^{m+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{m+1})}$$

$$=\frac{\rho(1-\rho^{m+1})-(m+1)\rho^{m+1}(1-\rho)}{(1-\rho)(1-\rho^{m+1})}.$$

或
$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(m+1)\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}},\ \rho\neq 1.$$

式中 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$。这里λ是顾客到达强度。但当系统满员时，顾客到达强度为零。因此需要求出总的有效到达强度$\lambda_{效}$即，

$$\lambda_{效}=\lambda\sum_{n=0}^{m-1}P_n+0\times P_n=\lambda(1-P_m).$$

根据李太勒公式，排队顾客的平均数

$$L_{队}=\lambda_{效}W_{队}=\lambda_{效}\left(\frac{L_{系}}{\lambda_{效}}-\frac{1}{\mu}\right)=L_{系}-\frac{\lambda_{效}}{\mu}.$$

$$=L_{系}-\frac{\lambda(1-P_m)}{\mu}=L_{系}-\frac{A}{\mu}.$$

$\because$ $P_m=\rho^m P_0$, $L_{系}=\dfrac{\rho}{1-\rho}-\dfrac{(m+1)\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}}$,

$\therefore$ $L_{队}=\dfrac{\rho^2}{1-\rho}\left[\dfrac{1-m\rho^{m-1}+(m-1)\rho^m}{(1-\rho^{m+1})}\right]$.

式中 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$.

最后 $W_{系}=\dfrac{L_{系}}{\lambda(1-P_m)}$，$W_{队}=\dfrac{L_{队}}{\lambda(1-P_m)}$.

**例题7.5** 某洗车设备，在洗车机外有容纳千辆车的空地。设车辆到达按泊松流，每小时平均到达40辆．洗车时间服从指数分布，每小时平均洗车60辆。求系统极限概率和效率指标。

**解** $\lambda=40$，$\mu=60$．　$\rho=\dfrac{2}{3}$，$m=5$，

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}=\frac{1-\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6}=0.365.$$

$$P_1=\rho P_0=\frac{2}{3}\times 0.365=0.244,$$

$$P_2=\rho^2 P_0=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 0.365=0.162,$$

$$P_3=\rho^3 P_0=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times 0.365=0.108,$$

$$P_4=\rho^4 P_0=\left(\frac{2}{3}\right)^4\times 0.365=0.072,$$

$$P_5=\rho^5 P_0=\left(\frac{2}{3}\right)^5\times 0.365=0.045,$$

$P_6 = \rho^6 P_0 = 0$.

$$L_{系} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(m+1)\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+1}} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} - \frac{6\times\left(\frac{2}{3}\right)^6}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^6}$$

$= 1.43$(辆),

$\lambda_{效} = 40(1-P_5) = 40(1-0.045) = 38.08$,

$L_{队} = L_{系} - \dfrac{\lambda}{\mu} = 1.43 - \dfrac{38.08}{60} = 0.788$(辆),

$W_{系} = \dfrac{L_{系}}{\lambda_{效}} = \dfrac{1.423}{38.08} = 2.242$(小时).

## §5 $(M|M|1)$ 状态依赖服务

在排队服务过程中，有时有这样的服务员：当顾客排队长度达到一定长度时，服务员加快服务；反之，当排队顾客不多时，服务员就自动放慢速度；或者说，当排队长度超过$m$时，服务员用快速，其强度为$\mu_2$，反之，用慢速，其强度为$\mu_1$。因此系统平均服务强度取决于系统状态．设系统状态转移图如图7.7所示：

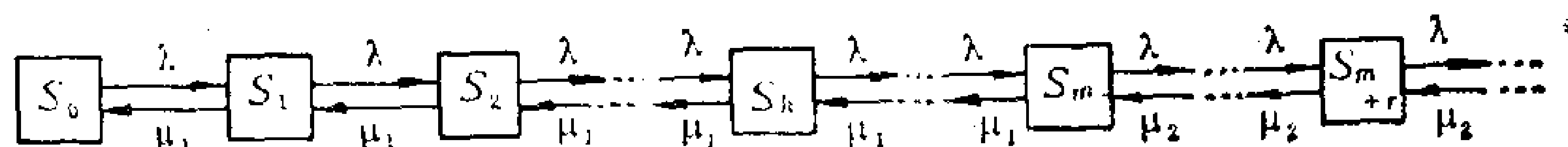



图7.7

$S_0$——服务员闲着；

$S_1$——服务员忙着，没有顾客排队；

$S_2$——服务员忙着，有一个顾客排队；

…………………………………………

$S_m$——服务员忙着，并加快服务速度，有 $m-1$ 个顾客排队；

…………………………………………

$S_{m+r}$——服务员忙着，有$m+r-1$个顾客排队。

…………………………………………

根据生、灭图和建立哥尔莫哥尔夫方程的一般法则，我们

对$S_0$，$\lambda P_0=\mu_1 P_1$，$P_1=\frac{\lambda}{\mu_1}P_0$。

对$S_1$，$\lambda P_1=\mu_1 P_2$，$P_2=\frac{\lambda}{\mu_1}P_1=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^2 P_0$。

…………………………………………

对$S_m$，$\lambda P_m=\mu_2 P_{m+1}$，$P_{m+1}=\frac{\lambda}{\mu_2}P_m=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m\cdot\frac{\lambda}{\mu_2}P_0$。

对$S_{m+1}$，$\lambda P_{m+1}=\mu_2 P_{m+2}$，$P_{m+2}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^2 P_0$。

…………………………………………

对$S_{m+r}$，$\lambda P_{m+r-1}=\mu_2 P_{m+r}$，$P_{m+r}=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^m\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^r P_0$。

…………………………………………

$$\therefore\qquad P_n=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda}{\mu_1}\right)^n P_0, & 1\leqslant n<m,\\ \dfrac{\lambda^n P_0}{\mu_1^{m-1}\cdot\mu_2^{n-m+1}}, & n>m.\end{cases}\tag{7.44}$$

令 $\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}$，$\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}<1$时，

$$P_0=\left[\frac{1-\rho_1^m}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2}\right]^{-1}.\tag{7.45}$$

现在求系统内顾客平均数

$$L_{系}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=P_0\left[\sum_{n=0}^{m}n\rho_1^n+\sum_{n=m}^{\infty}n\rho_1^{m-1}\rho_2^{n-m+1}\right]$$

$$=P_0\left[\rho_1\sum_{n=0}^{m-1}n\rho_1^{n-1}+\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{m-2}\sum_{n=m}^{\infty}n\rho_2^{n-1}\right]$$

$$=P_0\left[\rho_1\frac{d}{d\rho_1}\sum_{n=0}^{m-1}\rho_1^n+\rho_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{m-2}\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{\rho_2^m}{1-\rho_2}\right)\right].$$

故
$$L_{系}=P_0\left\{\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^m-m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right\}. \tag{7.46}$$

系统内排队顾客的平均数

$$L_{队}=L_{系}-(1-P_0) \tag{7.47}$$

根据李太勒公式可以求到.

顾客在系统内的平均停留时间

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}. \tag{7.48}$$

顾客平均排队时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}, \tag{7.49}$$

或

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1-P_0}{\lambda}. \tag{7.50}$$

式中 $\frac{1-P_0}{\lambda}$——为平均服务时间.

## §6 多通道等待制($M \mid M \mid n$)

设服务系统内有$n$(>1)个服务员. 顾客按泊松流来到服务系统，到达强度为$\lambda$；服务员的能力都是$\mu$，服务时间服从指数分布. 当顾客到达时，如果所有服务员都忙着，顾客便参加排队，等待服务，一直等到有服务员为他服务为止. 这种排队模型的生、灭图如图7.8所示：

图中， $S_0$——所有服务员都闲着，




图7.8

$S_1$——有一个服务员忙着，其余服务员闲着，

$S_2$——有二个服务员忙着，其余闲着，

………………………………………………

$S_k$——有$k$个服务员忙着，其余闲着，

………………………………………………

$S_n$——所有$n$个服务员都忙着，

$S_{n+1}$——所有$n$个服务员都忙着；有一个顾客排队，

$S_{n+r}$………………………………………

$S_{n+r}$——所有服务员都忙着，有$r$个顾客排队，

………………………………………………

如果$\frac{\rho}{n}<1$，则系统状态有极限概率存在．

设$\frac{\rho}{n}<1$满足．则根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫代数方程的一般法则（见第六章§1），

对$S_0$ $\lambda P_0=\mu P_1$，$P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0=\rho P_0$；

对$S_1$ $\lambda P_1=2\mu P_2$，$P_1=\frac{\lambda}{2\mu}P_2=\frac{\rho^2}{2!}P_0$；

对$S_2$ $\lambda P_2=3\mu P_3$，$P_2=\frac{\rho^3}{3!}P_0$；

对$S_{n-1}$ $\lambda P_{n-1}=n\mu P_n$，$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0$，

对$S_n$ $\lambda P_n=n\mu P_{n+1}$，$P_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0$，

对$S_{n+1}$ $\lambda P_{n+1}=n\mu P_{n+2}$，$P_{n+2}=\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0$，

……，…………………… ……………………

对$S_{n+r-1}$　$\lambda P_{r+r-1}=n\mu P_{n+r}$．　$P_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}P_0$，

…………………………………………

还有正则条件：$P_0+P_1+\cdots+P_n+\cdots+P_{n+r}+\cdots=1$，

或
$$P_0+\rho P_0+\frac{\rho^2}{2!}P_0+\frac{\rho^3}{3!}P_0+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}P_0+\cdots$$
$$+\frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}P_0+\cdots=1,$$

或
$$P_0=\left\{\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)+\left(\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots+\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}\right)\right\}^{-1}$$
$$=\left\{\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\left(1+\frac{\rho}{n}+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\rho}{n}\right)^r+\cdots\right)\right\}^{-1}$$
$$=\left\{\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}\right\}^{-1},$$

即
$$P_0=\left[\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}. \tag{7.51}$$

从而，$P_1=\rho P_0$，$P_2=\frac{\rho^2}{2!}P_0$，…，$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0$；

$$P_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0,\quad P_{n+2}=\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0;$$
$$P_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}P_0;\quad\cdots$$

现在我们求系统效率指标：

1）损失概率．因为在等待制系统中，请求服务的顾客，迟早会被接受服务的，所以$P_{损}=0$。

2）系统的相对通过能力

$$Q=1-P_{损}=1.$$

3）系统的绝对通过能力

$$A=\lambda Q=\lambda.$$

4）系统内排队顾客的平均数。

$$
\begin{aligned}
L_{队}&=1\times P_{n+1}+2P_{n+2}+\cdots+rP_{n+r}+\cdots\\
&=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0+2\,\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0+\cdots+r\,\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}P_0+\cdots\\
&=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0\left(1+2\frac{\rho}{n}+\cdots+r\left(\frac{\rho}{n}\right)^{r-1}+\cdots\right)\\
&=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0\,\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2},
\end{aligned}
$$

即

$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}. \tag{7.52}$$

5）排队顾客数的方差。根据方差定义：

$$
\begin{aligned}
D(L_{队})&=\sum_{k=n}^{\infty}(k-n)^2P_k-L^2_{队}\\
&=\frac{P_0\rho^n}{n!}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^2\frac{\rho^{k-n}}{k^{n-k}}-2n\sum_{k=n}^{\infty}\right.\\
&\quad\left.\cdot k\left(\frac{\rho}{k}\right)^{k-n}+n^2\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\rho}{k}\right)^{k-n}\right\}\\
&\quad-\left[\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}\right]^2\\
&=\frac{P_0\rho^n}{n!}\left\{n^2\frac{1}{1-\frac{\rho}{n}}+2n\frac{\rho}{n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\rho}{n}\frac{1-\frac{\rho}{n}}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^{3}}-\frac{2n^{2}}{1-\frac{\rho}{n}}-\frac{2n\left(\frac{\rho}{n}\right)}{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{2}}$$

$$+\frac{n^{2}}{1-\frac{\rho}{n}}\Bigg\}-L^{2}_{队}$$

$$=\frac{P_{0}\rho^{n}}{n!}\frac{\rho}{n}\frac{\left(1+\frac{\rho}{n}\right)}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^{3}}-L^{2}_{队}$$

$$=L_{队}\left(\frac{1+\frac{\rho}{n}}{1-\frac{\rho}{n}}-L_{队}\right),$$

即
$$D(L_{队})=L_{队}\left[\left(\frac{n+\rho}{n-\rho}-L_{队}\right)\right]. \tag{7.53}$$

6）顾客平均排队时间可根据李太勒公式有

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{\rho^{n}P_{0}}{n\mu\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^{2}}. \tag{7.54}$$

7）顾客排队时间方差.

$$D(W_{队})=\left(\frac{2}{\sum\limits_{n+r}P_{n+r}}-1\right)W^{2}_{队}. \tag{7.55}$$

8）占用服务员的平均数

$$\bar{K}=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu}=\rho. \tag{7.56}$$

9）系统内顾客的平均数

$$L_{系}=L_{队}+\rho. \tag{7.57}$$

**例题7.6** 长沙车站有两个电视问讯台.问讯者按泊松流到

来，平均每分钟有0.8个旅客问讯。问讯时间服从同一指数分布，每次问讯平均 2 分钟。求系统的效率指标。

**解** 已知：$n=2$，$\lambda=0.8$，$\mu=\frac{1}{2}=0.5$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=1.6$，

$\frac{\rho}{n}=\frac{1.6}{2}=0.8<1$，∴极限存在。

我们先求系统的极限概率：

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+1.6+1.28+\frac{4.09}{2\times 0.4}\right]^{-1}=0.111,$$

$$P_1=\rho P_0=1.6\times 0.111=0.178,$$

$$P_2=\rho^2/2!P_0=1.28\times 0.111=0.142,$$

$$P_3=\frac{\rho^3}{2\cdot 2!}P_0=\frac{1.6^3}{3!}\times 0.111=0.114,$$

$$P_4=\frac{\rho^4}{n^2\cdot n!}P_0=\frac{1.6^4}{2^2\times 2!}\times 0.111=0.091,\ \cdots$$

1）系统绝对通过能力

$$A=\lambda Q=\lambda=0.8.$$

2）顾客占用服务员的平均数

$$\bar{K}=\frac{A}{\mu}=\frac{0.8}{0.5}=0.5.$$

3）没有顾客排队的概率：

$$P_0+P_1+P_2=0.111+0.178+0.142=0.431.$$

4）排队顾客的平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}=\frac{1.6^3\times 0.111}{2\times 2\times 0.42^2}=0.71.$$

5）系统内顾客平均数

$$L_{系}=L_{队}+\bar{K}=0.71+1.6=2.31.$$

6）顾客平均排队时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.71}{0.8}=0.89(分钟).$$

7）顾客在系统内平均停留时间

$$W_{系}=W_{队}+\bar{t}_{服}=0.89+2=2.89(分钟).$$

## §7 多通道混合制($M\mid M\mid n\mid m$)

系统内有$n$(>1)个服务员，顾客按最简单流来到服务系统，到达强度$\lambda$。服务员具有相等的强度$\mu$，服务时间都按指数分布。系统内有$m$个位置供顾客排队。当顾客到达时，系统满员，即服务员都在忙着，$m$个位置满座。顾客立即离去，另求服务。

系统的状态用系统内的顾客数目表示。本模型的生、灭图如图7.9所示：

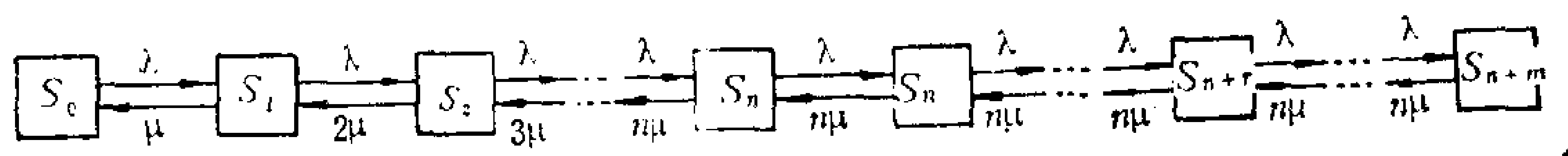



图7.9

图中　$S_0$——所有服务员都空着；

$S_1$——有一个服务员忙着，余者闲着；

………………………………………

$S_k$——有$k$个服务员忙着，余者闲着；

………………………………………

$S_n$——所有$n$个服务员都在为顾客服务；

$S_{n+1}$——所有服务员都忙着，有一个顾客排队；

………………………………………

$S_{n+r}$——所有服务员都忙着，有$r$个顾客排队；

………………………………………

$S_{n+m}$——所有$n$个服务员都忙着，有$m$个顾客排队。

箭头线自左向右表示顾客到达流，其强度都是$\lambda$.箭头线自右向左表示服务流，其强度等于一个服务员的强度$\mu$乘服务员的数目.

根据生、灭图和建立哥尔莫哥尔夫方程的一般法则，我们有

$$\lambda P_1=\mu P_0,\quad P_1=\frac{\lambda}{\mu}P_0=\rho P_0;$$

$$\lambda P_1=2\mu P_2,\quad P_2=\frac{\rho^2}{2!}P_0;$$

$$\lambda P_2=3\mu P_2,\quad P_3=\frac{\rho^3}{2!}P_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda P_{n-1}=n\mu P_n,\quad P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0;$$

$$\lambda P_n=n\mu P_{n+1},\quad P_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0;$$

$$\lambda P_{n+1}=n\mu P_{n+2},\quad P_{n+2}=\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda P_{n+m-1}=n\mu P_{n+m};\quad P_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0.$$

还有正则条件：$P_0+P_1+\cdots+P_n+\cdots+P_{n+m}=1$.

$$\therefore\qquad P_0=\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\cdots+\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}\right\}^{-1}.$$

$$\because\qquad \frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}+\cdots+\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}$$

$$=\frac{\rho^n\left[\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right]}{n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}$$

$$\therefore \qquad P_0 = \left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\left[\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right]}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1}. \tag{7.58}$$

从而，$P_1=\rho P_0$，$P_2=\rho^2/2!P_0,\cdots,P_n=\dfrac{\rho^n}{n!}P_0$，

$$P_{n+1}=\frac{\rho^n}{n\cdot n!}P_0,\quad P_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0,$$

$$P_{n+2}=\frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!}P_0,\quad \cdots,\quad P_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0.$$

到此，系统状态概率全数求到。

现在求系统的效率指标：

1）损失的概率

$$P_{损}=P_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0. \tag{7.59}$$

2）系统的相对通过能力

$$Q=1-P_{损}=1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0. \tag{7.60}$$

3）系统的绝对通过能力

$$A=\lambda Q=\lambda\left[1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0\right]. \tag{7.61}$$

4）占用服务员的平均数：对损失制系统，占用服务员的平均数等于系统内顾客的平均数。对等待制系统，占用服务员的平均数不等于系统内顾客的平均数。因为后者包括排队顾客的平均数。我们用$\bar{K}$表示系统内顾客的平均数；占用服务员的平均数记作$\bar{Z}$。在单位时间内，每个被占用的服务员服务$\mu$个顾客。在系统内，服务$A$个顾客（单位时间内）。因而平均占用服务员的数目：

$$\bar{Z}=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu}\left(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0\right),$$

或
$$\bar{Z}=\rho\left(1-\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0\right). \quad (7.62)$$

5）排队顾客的平均数.即系统内可能的顾客数及其相应的概率的乘积。

$$L_{队}=1\times P_{n+1}+2\times P_{n+2}+\cdots+mP_{n+m}$$

$$=1\times\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0+2\times\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0$$

$$+\cdots+m\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0\left[1+2\frac{\rho}{n}\right.$$

$$\left.+3\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\cdots+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m-1}\right].$$

令 $\frac{\rho}{n}=x$。代入上式，得

$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0[1+2x+3x^2+\cdots+mx^{m-1}].$$

$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!}\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{m}x^k=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{m+1}}{1-x}\right)$$

$$=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!}\frac{1-(m+1)x^m+mx^{m+1}}{(1-x)^2},$$

或
$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0\left[1-(m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right]}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}. \quad (7.63)$$

6）系统内顾客的平均数

$$L_{系}=L_{队}+L_{服}.$$

而
$$L_{服}=\bar{Z},$$

∴
$$L_{系}=L_{队}+\bar{Z}.$$

7）顾客平均排队时间。我们作些假设：在系统的什么状

态下新到顾客，它将等待多少时间。如果顾客到达时，还有空闲的服务员，顾客立即被接受服务，即排队时间等于零。如果顾客到达时，$n$个服务员都不空，但当时没有顾客排队，则它将排队，等待服务，平均等待$\frac{1}{n\mu}$时间（因为$n$个服务员空着的强度为$n\mu$），如果顾客到达时，$n$个服务员都不空，系统内已经有一个顾客排队，这时，它将平均等待$\frac{2}{n\mu}$时间（因为在它前面有一个顾客）。依此类推。如果顾客到达时，所有服务员都不空，且系统内已经有$r$个顾客排队，它将平均等待$\frac{r}{n\mu}$时间。如果顾客到达时，系统内已经有$m$个顾客排队，则它立即离去，另求服务。因而它的等待时间为零(不予服务)。所以平均排队时间等于每个顾客的排队时间与其相应概率之积。

$$
\begin{aligned}
W_{队} &= \frac{1}{n\mu}P_n + \frac{2}{n\mu}P_{n+1} + \cdots + \frac{m}{n\mu}P_{n+m-1} \\
&= \frac{1}{n\mu}\left[\frac{\rho^n}{n!}P_0 + \frac{2\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0 + \cdots + \frac{m\rho^{n+m-1}}{n^{m-1}n!}P_0\right] \\
&= \frac{\rho^n P_0}{n\cdot n!\mu}\left[1 + \frac{2\rho}{n} + \frac{3\rho^2}{n^2} + \cdots + \frac{m\rho^{m-1}}{n^{m-1}}\right]
\end{aligned}
$$

上式和单通道混合制相似，两者只差$\frac{1}{\rho\mu} = \frac{1}{\lambda}$。

即 $$W_{队} = \frac{L_{队}}{\lambda}$$

把$L_{队}$代入，得：

$$
\begin{aligned}
W_{队} &= \frac{\rho^n P_0}{n\mu n!}\frac{1-(m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{\rho^n P_0\left[1-(m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m + m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right]}{n\mu n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}
\end{aligned}
$$

8）顾客在系统内平均停留时间．这和单通道时一样． 两者的区别只在于平均等待时间、平均服务时间乘以相对通过能力

$$W_{系}=W_{队}+\frac{Q}{\mu}.$$

**例题7.7** 汽车加油站上设有两条加油管．汽车按最简单流到达每二分钟到达一辆，汽车加油时间服从指数分布，平均加油时间

$$\bar{t}_{服}=\frac{1}{\mu}=2(分钟).$$

自动加油站上最多只能停$m=3$辆汽车．如果汽车到来时，系统满员，则汽车开到别的加油站去．求系统效率指标．

**解** 已知：$n=2$，$m=3$，$\lambda=2$，$\mu=0.5$，$\rho=4$

1）系统空闲的概率

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^2}{2!}\frac{n-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\frac{\rho}{n}}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^2}{2}\frac{2-2^4}{1-2}\right]^{-1}=0.008.$$

2）损失概率

$$P_{损}=P_{n+m}=P_5=\frac{\rho^5}{n^3\cdot n!}P_0=\frac{4^5}{2^3\cdot 2}\times 0.008$$

$$=0.512$$

3）相对通过能力

$$Q=1-P_{损}=1-0.512=0.488.$$

4）绝对通过能力

$$A=\lambda Q=2\times 0.488=0.976.$$

5）占用加油管的平均数

$$\bar{Z}=\frac{A}{\mu}=\frac{0.975}{0.5}=1.952$$ （几乎两条加油管没有空时间）。

6）排队汽车的平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^3}{n\cdot n!}P_0\frac{1-(m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{4^3\times 0.008}{2\times 2}\frac{1-4\times 2^3+3\times 2^4}{(1-2)^2}=2.18。$$

7）顾客平均排队时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{2.18}{2}=1.09（分钟）。$$

8）顾客平均逗留时间

$$W_{系}=\frac{L_{队}}{\lambda}+\frac{Q}{\mu}=1.09+0.976=2.07（分钟）。$$

## §8　多通道等待制(服务员能力不等)

前面讨论的服务员能力都相等。本节将讨论系统内服务员能力不相等的情形。

设系统内有$n$个服务员。它们的能力分别为：$\mu_1$，$\mu_2$，…，$\mu_n$。系统的总能力

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i,$$

即当所有$n$个服务员不停地工作时，单位时间内被服务顾客的平均数。

当系统内服务员数目很多时，这种模型很难建立。我们只考虑$n=2$时的模型。

当顾客到达系统时，系统空着，顾客可以任意选择一个服务员，请求服务。选择的概率对一号服务员为$\varphi_1=\varphi$；对二号服务员为$\varphi_2=(1-\varphi)$，$0\leqslant\varphi\leqslant1$。设顾客排成一个队列。一号服务员能力大于二号服务员，$\mu_1>\mu_2$。

现在我们描述服务系统的工作：

当$\varphi=0$，顾客经常请求二号服务员服务；

当$\varphi=0.5$，顾客选择两个服务员的机会相等；

当$\varphi=1$，顾客经常由1号服务员服务。自然，$\varphi$也可能是其它中间值。

为什么$\varphi<1$呢？可以这样理解，有些顾客是本系统的常客，而还有一些是临时到来的。

$\varphi=0.5$，一般说，不太可能，因为谁都愿意请服务能力大的服务员服务。但是也有一些顾客在习惯上请某个服务员服务…等。

本模型有4个参数：$n$，$\mu_1$，$\mu_2$和$\varphi$。服务系统的效率指标，在$\varphi$给定时，取决于系统的负荷水平：

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}.$$

令　　$\alpha=\frac{\mu_2}{\mu_1}$，如果$\alpha<1$。这时，生、灭图如图7.10所示。

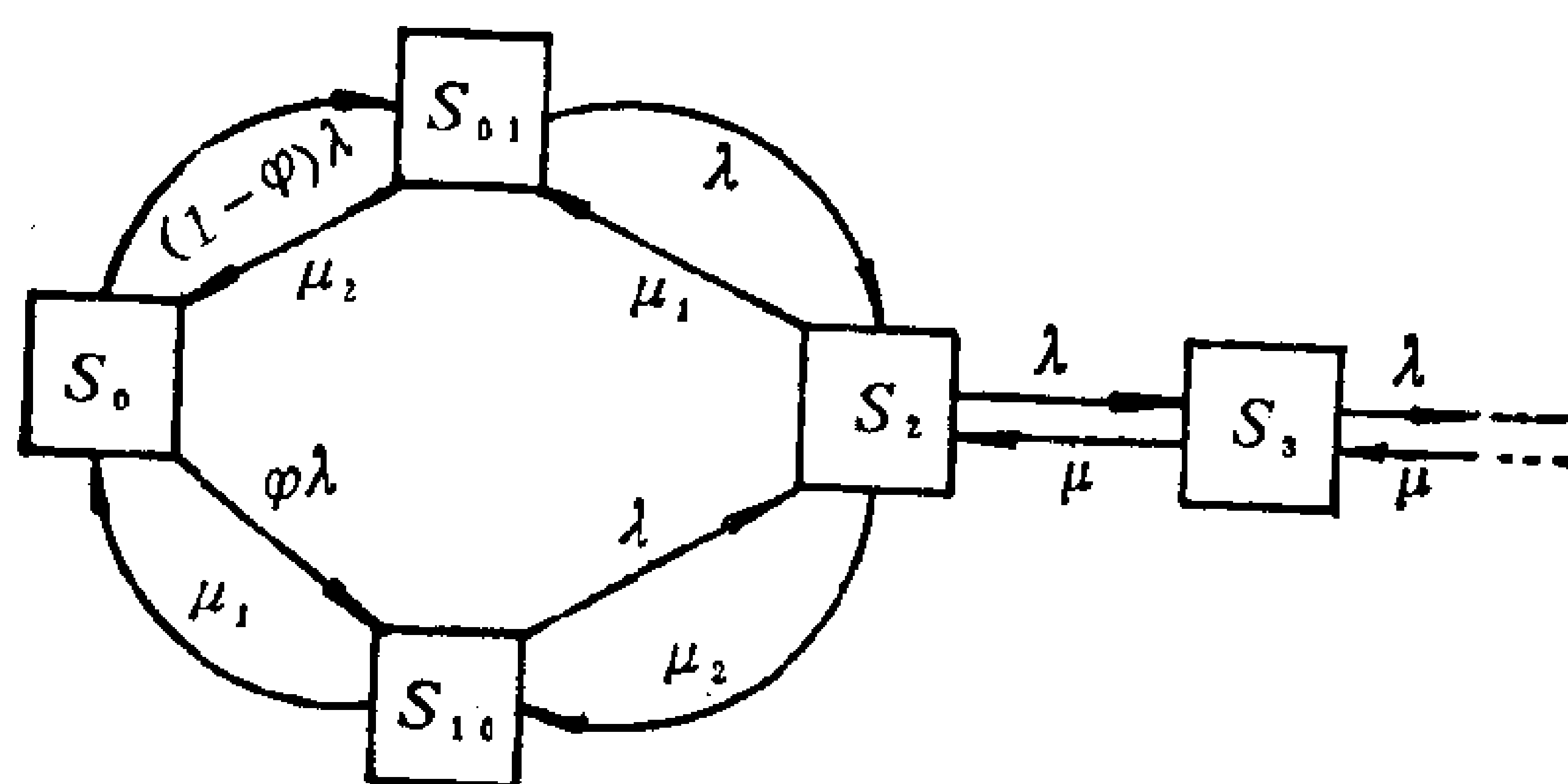



图7.10

图中　$\lambda$—顾客到达强度；

$\mu$—服务强度；

$S_0$—服务员都闲着；

$S_{01}$—系统内有一个顾客，2号服务员为它服务，1号服务员闲着；

$S_{10}$—系统内有一个顾客，1号服务员为它服务，2号服务员闲着；

$S_2$—系统内有2个顾客；

$S_3$—系统内有3个顾客；

…………………………。

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程法则

对$S_0$　$[(1-\varphi)\lambda+\varphi\lambda]P_0=\mu P_{01}+\mu_1 P_{10}$，

或　$\lambda P_0=\mu_2 P_{01}+\mu_1 P_{10}$，

对$S_{01}$　$(\lambda+\mu_2)P_{01}=\mu_1 P_2+(1-\varphi)\lambda P_0$，

对$S_{10}$　$(\lambda+\mu_1)P_{10}=\mu_2 P_2+\varphi\lambda P_0$，

…………………………

对$S_n$　$(\lambda+\mu)P_n=\mu P_{n+1}+\lambda P_{n-1}$，$n\geqslant 2$。

引入系数$\alpha=\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$后，得

$$P_{01}=\frac{\rho}{1+2\rho}\cdot\frac{1+\alpha}{\alpha}(\rho+1-\varphi)P_0,$$

$$P_{10}=\frac{\rho}{1+2\rho}(1+\alpha)(\rho+\varphi)P_0,$$

$$P_2=\frac{\rho^2}{1+2\rho}\frac{1+\alpha}{\alpha}[1+(1+\alpha)\rho-(1-\alpha)\varphi]P_0,$$

………………………………

$$P_n=\frac{\rho^n}{1+2\rho}\frac{1+\alpha}{\alpha}[1+(1+\alpha)\rho-(1-\alpha)\varphi]P_0.$$

…………………………………………………

还有正则条件：$P_0+P_1+\cdots+P_n+\cdots=1$.

应该注意，系统输入流强度等于输出流强度。其平均值为

$$\lambda=0\times P_0+\mu_2P_{01}+\mu_1P_{10}+\sum_{n=2}^{\infty}\mu P_n,$$

从而得
$$P_0=\frac{1-\rho}{1+\frac{\rho}{1+2\rho}\cdot\frac{1}{\alpha}[1+(1+\alpha^2)\rho(1-\alpha^2)\varphi]},\tag{7.64}$$

服务系统内顾客平均数：

$$L_{系}=\rho(1+\alpha)\frac{1+(1+\alpha)\rho-(1-\alpha)\varphi}{\alpha(1+2\rho)+\rho(1+(1+\alpha^2)\rho-(1-\alpha^2)\varphi)}.\tag{7.65}$$

## §9　多通道等待制$(M|M|\infty)$

到此，我们所讨论的服务系统内服务员的数量是有限的。但在实际生活中，有的服务系统内，服务员的数量是不限的。例如，收看电视节目，无线电广播等。

设顾客按泊松流到达服务系统，其强度为$\lambda$；服务时间为指数分布，其强度为$\mu$。系统状态的生、灭图如图7.11所示：

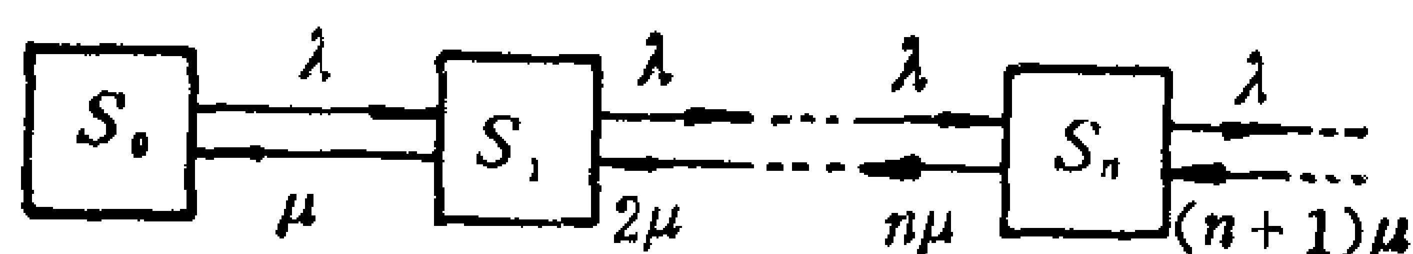



图7.11

图中　$S_0$—系统处于空闲状态，

$S_1$—系统内有一个顾客，

………………………………

$S_n$—系统内有$n$个顾客($0\leqslant n\leqslant\infty$)

根据生、灭图，

对$S_0$，　$\lambda P_0=\mu P_1$，$P_1=\rho P_0$；

对$S_1$，　$\lambda P_1=2\mu P_2$，$P_2=\dfrac{\rho^2}{2!}P_0$；

………………………………

对$S_{n-1}$，$\lambda P_{n-1}=n\mu P_n$，$P_n=\dfrac{\rho^n}{n!}P_0$；

………………………………

还有正则条件：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n=1$，

$$\therefore\qquad P_0=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}=[e^{-\rho}]^{-1}. \tag{7.66}$$

或

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho},\ n=0,\ 1,\ \cdots \tag{7.67}$$

系统内顾客数的期望值

$$L_{系}=\rho.$$

排队顾客的数目，$L_{队}=0$　因而排队时间也等于零。

顾客在系统内的平均停留时间

$$W_{系}=\frac{1}{\mu}.$$

初看，这种模型没有多大意义，但当我们分析既有模型时，可以用来研究系统的转移过程。例如，系统运管之初，顾客数目$n(0)$比服务员的数目$n$少得多。在不长的时间内，不是所有服务员都马上忙着，这段过程可以看作本系统。这种过程的正确性只适合于系统内顾客数的概率小于服务员数目$n$。

**例题7.8**　中央电视台希望知道，星期六晚上，主要节目时间，收看一频道节目的电视机的平均数。由历史资料发现：星期六晚上，主要节目时间，开电视机的数目服从泊松流。平

均每小时有120000台。上海地区有三个频道。人们可以随机选看哪个频道。设收看时间服从指数分布，平均收看时间为1.5小时。

**解** 为了求得收看二频道电视机的平均数$L_{系}$，只要求得：

$$\frac{\lambda}{\mu}=\rho.$$

∵ $$\lambda=\frac{120000}{3}=40000,$$

$$\bar{t}_{服}=1.5\text{小时},$$

∴ $$\rho=\lambda\bar{t}_{服}=40000\times1.5=60000(\text{台}).$$

**例题7.9** 某航运公司有一个外轮码头。外轮按泊松流到来。平均每天有6只船到达。外轮码头的卸船时间服从指数分布。平均每天卸2只船。由于外轮在港内停留时间超过一定期限，罚款极重，为了避免排队卸船现象，公司需要配备多少个装卸组？多于6组的概率？

**解** 已知：$\lambda=6$，$\mu=2$，$\rho=\frac{6}{2}=3$，

∴ $$e^{-\rho}=e^{-3}=0.0498,$$

当 $$P(>6)=1-\sum_{n=0}^{6}P_n=1-\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^6}{6!}\right)e^{-\rho}$$

$$=1-[19.412\times0.0498]=0.0333.$$

因此，当设置6个装卸组时，外轮等待的概率为0.0333。

如果配备8个装卸组，则

$$P(>8)=0.0036.$$

即这时基本上消除了外轮排队卸船现象。

## §10 单通道混合制(排队时间有限)

设单通道排队服务系统。当顾客到达系统时，系统内已经

有$n$个顾客排队。这时，顾客以 $\varepsilon^n$ 的概率参加排队。显然，当$n=0$时，$\varepsilon^n=1$，即没有不耐烦的顾客。因为当时系统空闲着，顾客一到，立即被接受服务。

如果顾客按最简单流到来，其强度$\lambda$。服务时间服从指数分布，其强度$\mu$。不耐烦的顾客从排队队列中离去也是服从最简单流的，这种模型的生、灭图如图7.12所示：

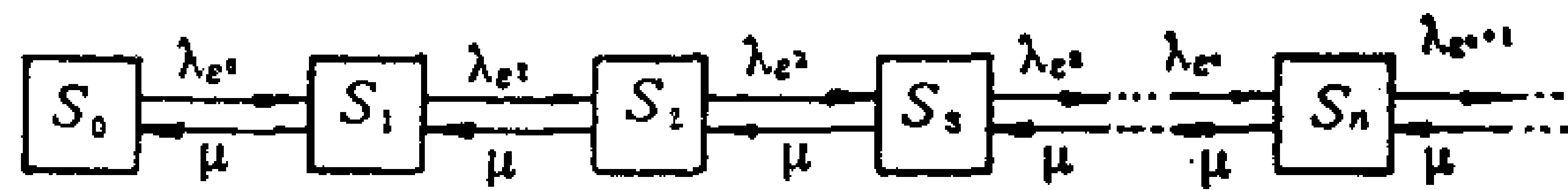


图7.12

根据图7.12和建立哥尔莫可尔夫方程的规则，

对$S_0$，　$\lambda\varepsilon^0 P_0=\mu P_1$，$P_1=\varepsilon^0\dfrac{\lambda}{\mu}P_0=\varepsilon^0\rho P_0$，

对$S_1$，　$\lambda\varepsilon^1 P_1=\mu P_2$，$P_2=\varepsilon^1\dfrac{\lambda}{\mu}P_1=\varepsilon^0\varepsilon^1\rho^2 P_0$，

对$S_2$，　$\lambda\varepsilon^2 P_2=\mu P_3$，$P_3=\varepsilon^0\varepsilon^1\varepsilon^2\rho^3 P_0$，

……………………………………

对$S_{n-1}$，$\lambda\varepsilon^{n-1}P_{n-1}=\mu P_n$，$P_n=\varepsilon^0\varepsilon^1\cdots\varepsilon^{n-1}\rho^n P_0$

或

$$P_n=\rho^n\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}P_0 \tag{7.68}$$

如果$n$是很大的数，则状态概率$P_n$趋于极限零($\rho<1$或$\rho>1$都一样)。

还有正则条件，$\sum\limits_{k=0}^{n}P_k=1$。

现在求系统效率指标：

1) 系统内顾客平均数

$$L_{系}=\sum nP_n。$$

2) 系统内排队顾客的平均数

$$L_{队}=\sum(n-1)P_n。$$

3）系统损失概率

因为 $L_{系}=L_{队}+\rho(1-P_{损})$,

所以 $$P_{损}=1-\frac{L_{系}-L_{队}}{\rho}. \tag{7.69}$$

4）服务员的平均负荷(利用率)

$$\eta=L_{系}-L_{队}=\rho(1-P_{损}). \tag{7.70}$$

**例题7.10** 设某公用电话，每分钟平均有0.4个顾客到达. 平均通话时间$\frac{1}{\mu}=4$分钟. 顾客按最简单流到来,服务时间服从指数分布.

通过观察：当电话机前已经有二个人等待打电话时，有大于5%的顾客自动离去，成为不耐烦的顾客. 其概率为$\varepsilon$. 求系统的效率指标.

**解** 设系统内有$n$个顾客时到来的顾客需要等待的平均时间为$n\frac{1}{\mu}$. 部分顾客参加排队,其中成为不耐烦顾客的概率$\varepsilon_n=e^{-\alpha\frac{n}{\mu}}$. 式中$\alpha$是不耐烦顾客的系数. 在我们的例子中，$n=3$,

$$\frac{1}{\mu}=4,$$

∴ $$\varepsilon_0^{-\alpha\frac{n}{\mu}}=0.05.$$

设$\varepsilon=e^{-\alpha\frac{1}{\mu}}$为常数时，则$\varepsilon_n=\varepsilon^n$，因此，$\varepsilon_0=1$，因为系统处于空闲状态($n=0$)时，不可能有不耐烦的顾客.

∴ $$-12\alpha\ln\varepsilon_0=\ln0.05,$$

或 $$12\alpha=\ln\frac{1}{0.05}=\ln20=3.$$

∴ $$\alpha=\frac{1}{4}.$$

从而，根据$n$求$\varepsilon_n$. 其结果列于下表：

| $n$ | $\varepsilon_n=\varepsilon^{-n}$ | $\frac{P_n}{P_0}$ | $P_n$ | $nP_n$ | $(n-1)P_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.000 | 1.000 | 0.266 | 0.000 | 0.000 |
| 1 | 0.368 | 1.600 | 0.425 | 0.425 | 0.000 |
| 2 | 0.135 | 0.940 | 0.251 | 0.502 | 0.251 |
| 3 | 0.050 | 0.204 | 0.054 | 0.162 | 0.108 |
| 4 | 0.018 | 0.016 | 0.004 | 0.016 | 0.012 |
| 5 | 0.007 | 0.000 | | | |
| 6 | 0.002 | 0.000 | | | |
| 7 | 0.001 | 0.000 | | | |
| 计 | | 3.762 | 1.000 | 1.105 | 0.371 |

因$\frac{P_n}{P_0}=3.762$。所以，$P_0=\frac{1}{3.762}=0.266$。

$L_{系}=\sum nP_n=1.105$；$L_{队}=\sum(n-1)P_n=0.371$。

$\eta=L_{系}-L_{队}=1.105-0.371=0.734$，

$P_{损}=1-(1-P_0)/\rho=1-(1-0.266)/1.6=0.541$。

因此，每分钟到达0.4个顾客时，有0.541×24＝13人没有叫通电话。耐烦的顾客有0.459×24＝11人。每人平均通话时间为4分钟时，在一小时内，共通话时间为11×4＝44分钟。或者说，在一小时内，电话机平均有16分钟是空的。电话机使用不太忙，因为它的负荷只有73.4%。

## §11 多通道等待制（排队时间有限）

设系统内有$n$（>1）个服务员，系统的容量不受限制，当顾客按最简单流到达时，到达强度$\lambda$，如果所有服务员都不空，参加排队。当排队等待一个时间$T_{队}$后，仍轮不到接受它服务，顾客离开队列，另求服务。如果服务时间服从指数分布，其强度为$\mu$，参加排队的顾客都有得不到服务而离去的可能，我们

叫它为离去流，其强度为 $\Delta$. 如果每个顾客在得到服务之前，排队等待的时间都服从同一指数分布，且顾客到达间隔时间和服务时间也都服从指数分布，则排队过程是马尔可夫随机过程。这种模型的生、灭图如图7.13所示：

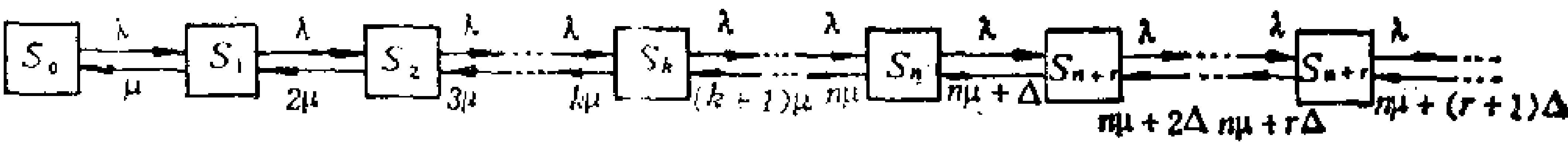


图7.13

图中 $S_0$—服务员都闲着，

$S_1$—有一个服务员在工作(忙着)，

$S_2$—有二个服务员忙着，

………………………………

$S_n$—所有服务员都在为顾客服务，

$S_{n+1}$—所有服务员都忙着，有一个顾客排队，

………………………………………………

$S_{n+r}$—所有服务员都忙着，有$r$个顾客排队，

………………………………………………

图中箭头线自左向右表示顾客到达流，其强度为 $\lambda$. 箭头线自右向左表示服务流和顾客（不耐烦的）离去流. 如果有 $n$ 个服务员在工作，则服务流强度为$n\mu$；如果有$r$个顾客排队，则不耐烦顾客的强度为$r\Delta$.

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，系统状态的极限概率为：

$$P_1=\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1!}P_0,$$

$$P_2=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!}P_0,$$

……………………

$$P_n=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}P_0,$$

$$P_{n+1}=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot\lambda}{n!(n\mu+\Delta)}P_0,$$

$$P_{n+2}=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\frac{\lambda^2}{(n\mu+\Delta)(n\mu+2\Delta)}P_0,$$

……………………………………

$$P_{n+r}=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\frac{\lambda^r}{(n\mu+\Delta)(n\mu+2\Delta)\cdots(n\mu+r\Delta)}P_0,$$

……………………………………………………

根据正则条件：

$$P_0=\left\{1+\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!}+\cdots+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\left[\frac{\lambda}{n\mu+\Delta}+\frac{\lambda^2}{(n\mu+\Delta)(n\mu+2\Delta)}+\cdots+\frac{\lambda^r}{(n\mu+\Delta)(n\mu+2\Delta)\cdots(n\mu+r\Delta)+\cdots}\right]\right\}^{-1},$$

令 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$, $\beta=\frac{\Delta}{\mu}$.

则

$$P_0=\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho}{n+\beta}+\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}+\cdots+\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\cdots(n+r\beta)}+\cdots\right]\right\}^{-1}, \tag{7.71}$$

从而 $P_1=\rho P_0$,

$$P_2=\frac{\rho^2}{2!}P_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0,$$

$$P_{n+1}=\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho}{n+\beta}P_0,$$

$$P_{n+2}=\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}P_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{n+r}=\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\cdots(n+r\beta)}P_0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在此，我们指出本模型的某些特点：如果排队长度不受限制，没有不耐心的顾客，即没有从排队队列中离去的顾客，则极限状态概率，在$\rho<n$时存在。当$\rho\geqslant n$时，则相应的几何级数不收敛。或$t\to\infty$时，排队队列无限延长。反之，在系统内有不耐心的顾客，它们迟早要离去。当$t\to\infty$时，极限概率总存在。因而，不耐烦的顾客流的强度与$\rho$无关。这一点可在$P_0$表达式的分母中看到。不管$\rho$和$\beta$是任何正数，都能收敛。

在有不耐烦顾客的排队模型中，损失概率没有意义，因为每一个顾客都可以参加排队，但不一定等到为它服务为止。

系统的相对通过能力是，除从队列中离去的顾客外，都将得到服务，因而需要计算从队列中离去的顾客的平均数；为此，先计算排队顾客的平均数

$$L_{队}=1\times P_{n+1}+2\times P_{n+2}+\cdots+rP_{n+r}+\cdots$$

在排队的顾客中，有一部分是不耐烦的顾客，它们在被接

受服务之前就离去了．设不耐烦顾客离开队列的强度为 $\Delta$．所以在单位时间内，在$L_{队}$中，没有得到服务就离去的顾客的平均数为$\Delta L_{队}$．因而在单位时间内被服务的顾客数为

$$A=\lambda-\Delta L_{队}. \tag{7.72}$$

式中　$\lambda$—单位时间内，到达顾客的平均数，

$\Delta L_{队}$—单位时间内，等不到服务就离去的顾客的平均数．

因为本系统是无限排队的，所以除不耐烦的顾客外，都将得到服务．

系统的相对通过能力

$$Q=\frac{A}{\lambda}=\frac{\lambda-\Delta L_{队}}{\lambda}=1-\frac{\Delta L_{队}}{\lambda}. \tag{7.73}$$

占用服务员的平均数

$$\bar{K}=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda-\Delta L_{队}}{\mu}=\rho-\beta L_{队}. \tag{7.74}$$

或

$$L_{队}=\frac{\rho}{\beta}-\frac{\bar{K}}{\beta}. \tag{7.75}$$

式中$\bar{K}$可按下式确定：

$$\begin{aligned}\bar{K}&=0\times P_0+1\times P_1+2\times P_2+\cdots\\&\quad+n[1-(P_0+P_1+\cdots+P_{n-1})]\\&=P_1+2P_2+\cdots+n[1-(P_0+P_1+\cdots+P_{n-1})].\end{aligned}$$

由于计算甚繁，我们不准备推导排队顾客的平均数的计算公式．

应当注意，本节中的极限概率公式和前面几节讨论的公式不同．前面的公式中的各项组成几何级数，而本模型中，不是级数．因此，它们的和只能用近似的方法获得．还可看到，随着公式中项数的增加，其值很快减少．因此，作为近似值，只

要取$(r-1)$项就有足够的精度。后面的各项可用下列方法表示近似。

$$\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho^r}{(n+\beta)(n+2\beta)\cdots(n+r\beta)}+\frac{\rho^{r+1}}{(n+\beta)(n+2\beta)\cdots[(n+(r+1)\beta]}+\cdots\right]<$$
$$\frac{\rho^n}{n!}\left[\frac{\rho^r}{\beta\cdot 2\beta\cdots r\beta}+\frac{\rho^{r+1}}{\beta\cdot 2\beta\cdots(r+1)\beta}+\cdots\right].$$

可以证明(从略)方括号中无穷项之和小于

$$\frac{\left(\frac{\rho}{\beta}\right)^r}{r!}e^{\frac{\rho}{\beta}},$$

因此，上式小于：$\dfrac{\rho^n}{n!}\dfrac{\left(\frac{\rho}{n}\right)^r}{r!}e^{\frac{\rho}{\beta}}$.

最后注意到，当$\Delta\to 0$，即$\beta\to 0$时，则在$\rho<n$时，不耐烦的顾客变成耐心等待的顾客。

## §12 单通道闭合式系统

前面讨论的模型，顾客来自服务系统外部。顾客到达强度与系统状态无关。现在我们讨论另一种模型：顾客到达流的强度依赖于系统本身的状态，即封闭式排队系统，用图7.14表示：

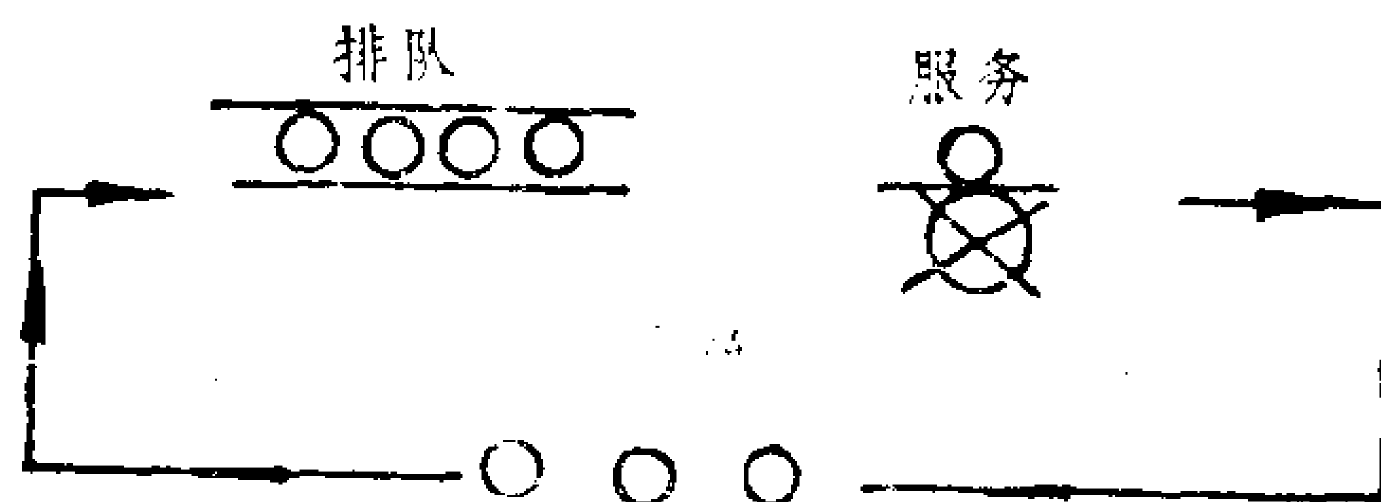



图7.14

例如有一个工人看管$n$台机床，其中有$\omega$台发生故障，需要修理。显然，有$(n-\omega)$台机床正在工作。如果每台机床发生故障的强度为$\lambda$，则$(n-\omega)$台机床故障流的强度为$\lambda(n-\omega)$。若修理一台机床的平均时间为

$$\bar{t}_{服} = \frac{1}{\mu}.$$

式中 $\mu$—服务强度。

当机床发生故障时，工人正在修理别的机床，则排队等待修理。求系统的极限状态概率和效率指标。

1） 工人闲着无事的概率；

2） 顾客排队的概率；

3） 排队顾客的平均数。

本模型中的顾客是机床，系统内的机床数目是确定的，其中一部分机床在修理，另一部分在工作，这两部分机床的数量取决于系统的状态。封闭式排队模型的特点是潜在的顾客数是有限的。系统的生、灭图如图7.15所示：

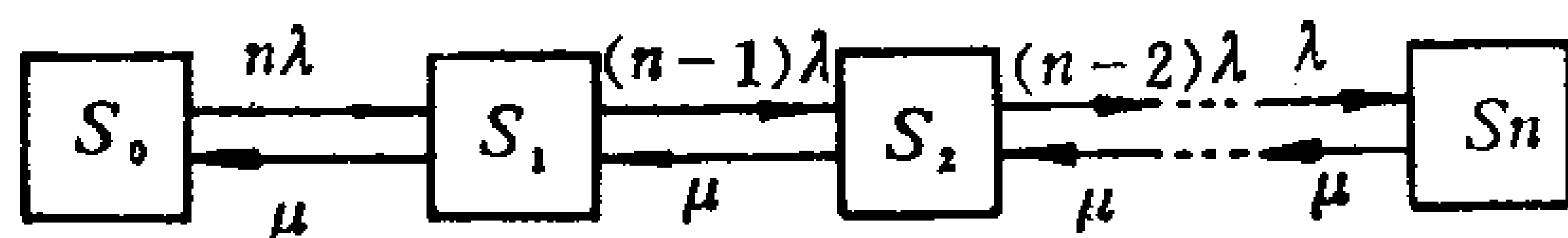



图7.15

图中：$S_0$—工人闲着，所有机床都工作着，

$S_1$—有一台机床发生故障，工人正加以排除；

$S_2$—有两台机床发生故障，工人忙着，有一台排队等待修理；

…………

$S_n$—有$n$台机床发生故障，其中一台正在修理，其余机床排队，等待修理。

改变系统状态的事件流用箭头线表示。系统状态自$S_0 \to S_1$

表示正在工作的所有机床转移到有一台机床发生故障状态，其强度为$n\lambda$。自$S_1 \to S_2$，系统由$S_1$状态转移到$S_2$。这时有$(n-1)$台机床在正常工作，故发生故障的强度为$(n-1)\lambda$，如此等等．箭头线自右向左表示服务流，其强度都是$\mu$。系统的极限状态概率为

$$p_1=\frac{n\lambda}{\mu}p_0,$$

$$p_2=\frac{n(n-1)\lambda^2}{\mu^2}p_0$$

$$p_3=\frac{n(n-1)(n-2)\lambda^3}{\mu^3}p_0,$$

…………

$$p_n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\lambda^n}{\mu^n}p_0.$$

还有正则条件：$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$。

令 $$\rho=\frac{\lambda}{\mu},$$

则 $$p_0=[1+n\rho+n(n-1)\rho^2+\cdots+n(n-1)\cdots 1\rho^n]^{-1}$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{n} k!\rho^k\right]^{-1}. \tag{7.76}$$

从而 $$p_1=n\rho p_0,\quad p_2=n(n-1)\rho^2 p_0,\cdots,$$

$$p_n=n(n-1)\cdots 1e^n\rho_0=n!\rho^n p_0. \tag{7.77}$$

至此，极限概率全部求到。

封闭式系统的效率指标与前面讨论的服务系统有所不同。

系统的绝对通过能力：在单位时间内，工人修复机床的平均数．为此，先计算修理概率：设工人闲着的概率为$p_0$，则修理的概率为

$$p=1-p_0. \tag{7.78}$$

当工人不停地工作时，单位时间内，能修好$\mu$台机床，因而，系统的绝对通过能力为

$$A=(1-p_0)\mu=p\mu. \qquad (7.79)$$

系统的相对通过能力，$Q=1$，因为有故障的机床迟早会得到修理。

现在计算出故障机床的平均数．记作$\bar{\omega}$．

$$\bar{\omega}=1\times p_1+2\times p_2+\cdots+np_n.$$

这样计算很不方便．我们用另一种方法计算：

每台工作着的机床出故障的强度为λ，在系统内工作着的机床的平均数为$(n-\bar{\omega})$．因而出故障机床的平均数为$\lambda(n-\bar{\omega})$。这些机床都需要工人修理．即

$$A=(n-\bar{\omega})\lambda. \qquad (7.80)$$

怎样考虑排队等待修理的机床的平均数呢？需要修理的机床即系统内的顾客数，包括排队等待修理的和正在修理的．设工人工作时，被修理的机床数为1；工人闲着时，被修理的机床数为0；正在被修理的机床的平均数等于工人忙着的概率$1-p_0$；排队等待修理的机床平均数等于需要修理的平均数$\bar{\omega}$中减去正在修理的部分．即

$$L_{队}=\bar{\omega}-(1-p_0)=n-\frac{1-p_0}{\rho}-(1-p_0)$$

$$=n-(1-p_0)\left(1+\frac{1}{\rho}\right),$$

或 $$L_{队}=n-(1-\rho_0)\left(1+\frac{1}{\rho}\right), \qquad (7.81)$$

即为等待修理机器的平均数。

现在我们用另法求$L_{队}$。

对生、灭图中的$S_i$我们有

$$(n-i)\lambda p_i=\mu p_{i+1},\ \ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n, \qquad (*)$$

而 $$L_{队}=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=\sum_{n=1}^{\infty}np_n-\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\sum_{n=1}^{\infty}np_n-(1-p_0),$$

或 $$\sum_{n=1}^{\infty}np_n=L_{队}+(1-p_0).$$

现在我们对（*）求和，且$i=0$到$n$，

即 $$(n-i)\lambda\sum_{i=0}^{n}p_i=\mu\sum_{i=0}^{n}p_{i+1},$$

$$n\lambda\sum_{i=0}^{n}p_i-\lambda\sum_{i=0}^{n}ip_i=\mu\sum_{i}^{n}p_{i+1}.$$

也即 $$n\lambda-\lambda[L_{队}+(1-p_0)]=\mu(1-p_0).$$

由此得 $$L_{队}=n-\frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-p_0),$$

或 $$L_{队}=n-(1-p_0)\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

我们知道了发生故障机床的平均数$\overline{\omega}$和单位时间内机床的生产能力$l$，就可以估计单位时间内，机床出故障而损失的能力

$$L=\overline{\omega}\,l. \tag{7.82}$$

**例题7·11** 一个工人看管三台机床，每台机床每运转1小时平均出两次故障。工人排除故障每次平均10分钟。试求工人忙着的概率、工人的能力、出故障机床的平均数和机床因出故障而损失的能力.

**解.** 据题意：$n=3$，$\lambda=2$，$\mu=6$ $\therefore\rho=\frac{1}{3}$.

先求工人闲着的概率$p_0$，

$$p_0=[1+n\rho+n(n-1)\rho^2+n(n-1)(n-2)\rho^3]^{-1}$$

$$=\left[1+3\times\frac{1}{3}+3\times2\times\frac{1}{3^2}+3\times2\times1\frac{1}{3^3}\right]^{-1}=0.346.$$

所以工人忙着的概率$p_{占}=1-p_0=1-0.346=0.654$.

现在求工人能力$A$，即每小时修理机床的平均数

$$A=\mu p_{占}=6\times0.654=3.94(台).$$

出故障机床的平均数$\bar{\omega}=n-\frac{p_{占}}{\rho}=3-\frac{0.654}{\frac{1}{3}}=1.04$.

机床因故障而损失的能力，取决于故障率

即 $$\frac{\bar{\omega}}{n}=\frac{1.04}{3}=0.347.$$

机床因故障而损失的生产能力达35%.

## §13 多通道闭合式排队系统

设有$m$个工人看管$n$台机床($n>m$). 系统可能状态有：

$S_0$—所有机床都正常工作，工人闲着；

$S_1$—有一台机床发生故障，有一个工人修理机床；

$S_2$—有两台机床发生故障，有两个工人修理机床；

…………

$S_m$—有$m$台机床发生故障，所有工人都在修理机床；

…………

$S_n$—所有机床都发生故障，有$m$台在修理，有$(n-m)$台排队等待修理.

系统状态的生、灭图如下图所示：

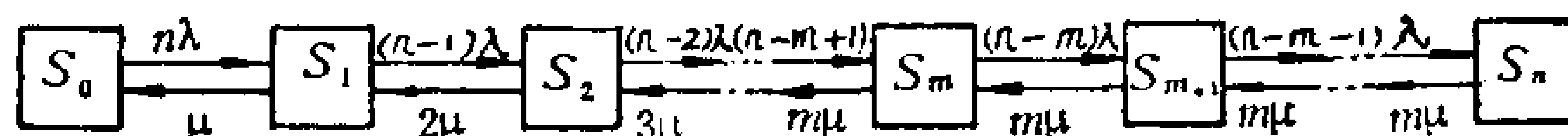



图7.16

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，我们有

$$p_1 = n\frac{\lambda}{\mu}p_0,$$

$$p_2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0,$$

$$p_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0,$$

…………

$$p_m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m p_0,$$

$$p_{m+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots m\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} p_0,$$

$$p_{m+2} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots m\cdot m^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+2} p_0,$$

…………

$$p_n = \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot\ \cdots m\cdot m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0.$$

根据正则条件，

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1!}\ \frac{\lambda}{\mu} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ \cdots m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m + \frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{1\cdot 2\cdot\ \cdots m\cdot m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m+1} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot\cdots m\cdot m^{n-m}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}.$$

用 $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$ 代入上式，得

$$p_0 = \left[1 + \frac{n}{1!}\rho + \frac{n(n-1)}{2!}\rho^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\rho^m + \right.$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{m\cdot m!}\rho^{m+1}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots 1}{m!\,m^{n-m}}\Big]^{-1}. \tag{7.83}$$

$\therefore$

$$p_1=\frac{n}{1!}\rho p_0,$$

$$p_2=\frac{n(n-1)}{2!}\rho^2 p_0,$$

$$p_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\rho^3 p_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!\ m}\rho^m p_0,$$

$$p_{m+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{m!\ m}\rho^{m+1}p_0,$$

$$p_{m+2}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m-1)}{m!\ m^2}\rho^{m+2}p_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{m!\ m^{n-m}}\rho^n p_0. \tag{7.84}$$

现在求占用工人的平均数，

$$\bar{k}=0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2+\cdots$$

$$+m(p_m+p_{m+1}+\cdots+p_n)$$

$$=p_1+2p_2+\cdots+(m-1)p_{m-1}+m(1-p_0-p_1$$

$$-\cdots-p_{m-1}).$$

$\bar{k}$也可以用单位时间内，工人修理的机床的平均数表达，即

$$A=\bar{k}\mu \quad 或 \quad \bar{k}=\frac{A}{\mu}. \tag{7.85}$$

出故障机床的平均数为

$$\overline{\omega}=n-\frac{A}{\lambda}=n-\frac{\overline{k}\mu}{\lambda}=n-\frac{\overline{k}}{\rho}. \tag{7.86}$$

**例题7.12** 两个工人看管六台机床．机床出故障是随机的．平均每工作1小时发生两次．工人排除一次故障平均10分钟．求系统效率指标．

**解** 已知：$n=6$，$m=2$，$\lambda=2$，$\mu=6$ $\therefore \rho=\frac{1}{3}$．

工人空闲的概率

$$p_0=\left[1+\frac{n}{1!}\rho+\frac{n(n-1)}{2!}\rho^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{m!\ m^{n-m}}\rho^n\right]^{-1}$$

$$=\left[1+6\frac{1}{3}+\frac{6\times5}{2}\frac{1}{3^2}+\frac{6\times5\times4}{1\times2\times2}\times\frac{1}{3^8}+\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times2^2}\frac{1}{3^4}+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times2\times2^8}\frac{1}{3^5}+\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times2^4}\times\frac{1}{3^6}\right]^{-1}=0.153.$$

$$\therefore \qquad p_1=\frac{6}{1}\ \frac{1}{3}\times0.153=0.306.$$

占用工人的平均数为

$$\overline{k}=1\times p_1+2(1-p_0-p_1)=1\times0.153+2(1-0.153-0.306)=1.235.$$

系统的绝对通过能力为

$$A=\overline{k}\mu=1.235\times6=7.41(\text{台}).$$

发生故障机床的平均数

$$\overline{\omega}=n-\frac{A}{\lambda}=6-\frac{7.41}{2}=2.295(\text{台}).$$

## § 14　一个可靠性问题

设技术装置由一个元件$A_1$组成。元件出故障的强度为$\lambda$，发生的故障流是最简单流。有故障的技术装置，立即修理。修理时间服从指数分布，其强度为$\mu$。储备元件数量无限。求系统的可靠性$p(t)$，即在$t$时刻系统处正常工作的概率；可靠性的极限值$P$，即离开开始工作时刻足够长的任意时刻的概率；到一定时刻系统一直正常工作的概率。

系统有两种可能状态：

$S_0$—系统正常工作；

$S_1$—系统在修理。

系统状态转移图和图（7·1）一样。

由图可见，它正是单通道损失制服务系统。

因此，$p_0(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$，

$$p_1(t)=1-p_0(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t}).$$

系统的可靠性

$$p(t)=p_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \qquad (7.87)$$

当$t\to\infty$时，$p(t)\to p$，即$p=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

即极限概率等于修理强度$\mu$和系统修理与出故障强度之和$(\lambda+\mu)$的比值。

现在求$\tilde{p}(t)$—到时刻$t$之前，系统没有发生故障的概率。即系统没有修理过或系统状态转移图如图（7.1），但图中没有服务过程的箭头线。

$$\frac{d\widetilde{p}_0(t)}{dt}=-\lambda\widetilde{p}_0,$$

从而 $\widetilde{p}_0(t)=e^{-\lambda t}$,

因此, $\widetilde{p}(t)=e^{-\lambda t}$, (7.88)

**例题7.13** 技术装置$S$由$n$个元件组成。每个元件发生的故障流为最简单流，其强度为$\lambda$，任何元件发生故障立即进行修理. 修理强度为$\mu$，修理时间服从指数分布。求：

系统可靠性$p(t)$；

系统极限可靠性$p$；

系统到时刻$t$之前没有出故障的概率$\widetilde{p}(t)$.

**解** 系统的可能状态：

$S_0$—正常工作；

$S_1$—排除一个元件的故障（由于流的无后效性，同时发生二个以上元件出故障的概率可以忽略）。

系统状态转移图和图（7·1）相同，但到达流的强度为$n\lambda$.

$$\therefore \quad p(t)=\frac{\mu}{n\lambda+\mu}+\frac{n\lambda}{n\lambda+\mu}e^{-(n\lambda+\mu)t},$$

$$p=\frac{\mu}{n\lambda+\mu},$$

$$\widetilde{p}(t)=e^{-n\lambda t}.$$

**例题7.14** 技术装置$S$由$n$个元件组成。每个元件发生的故障流服从最简单流，其强度为$\lambda$。发生故障的元件立即修理，其余元件继续工作。修理时间服从指数分布，其强度为$\mu$。

求：$p(t)$，$p$，正常工作元件的平均数。（当$t\to\infty$）。

本题的系统可能状态、状态转移图和多通道闭合式系统完全一样.

为了求$p(t)$，给出初始条件：

$$t=0;\ p_0=1;\ p_1=p_2=\cdots=p_n=0.$$

系统状态的极限概率可按本章§13求得。

当$m=n$，$\frac{\lambda}{\mu}=\rho$时，

$$p_0=\left[1+\frac{n}{1!}\rho+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\rho^r+\frac{n(n-1)\cdots2.1}{n!}\rho^n\right]^{-1}$$

$$=[1+c_n^1\rho+\cdots+c_n^r\rho^r+\cdots+c_n^n\rho^n]^{-1}=\frac{1}{(1+\rho)^n}. \tag{7.89}$$

我们要求的极限概率$p$就是$p_0$（系统可靠性）。

正常工作元件的平均数$\bar{u}$等于元件数$n$乘每个元件正常工作的概率。在极限状态下，每个元件正常工作的概率为$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$，从而

$$\bar{u}=\frac{n\mu}{\lambda+\mu}=\frac{n}{1+\rho}. \tag{7.90}$$

本节讨论的可靠性问题和排队论完全一致。但必须满足马尔可夫随机过程。

## §15　服务员之间相互帮助的服务系统

到此，我们讨论的排队模型是一个服务员服务一个顾客，而得不到空闲着的服务员的帮助。

现实生活中经常有这样的排队模型，一个顾客同时由几个服务员服务。例如，一台出故障的机床同时有两个工人修理。这种服务员间相互帮助的服务系统不仅在闭合式系统中有，在非闭合式系统中也存在。讨论本模型必须考虑两个因素：

1）有多个服务员为一个顾客服务时，服务进度能提前多少；

2）相互帮助的原则是什么？即什么时候，用多少服务员为一个顾客服务。

先讨论第一个问题. 若$k$个服务员同时为一个顾客服务，服务强度随着$k$的增多而不会减弱. 即$k$个服务员的工作强度是非降函数，用$\mu(k)$表示. $\mu(k)$的可能形式如下图所示：

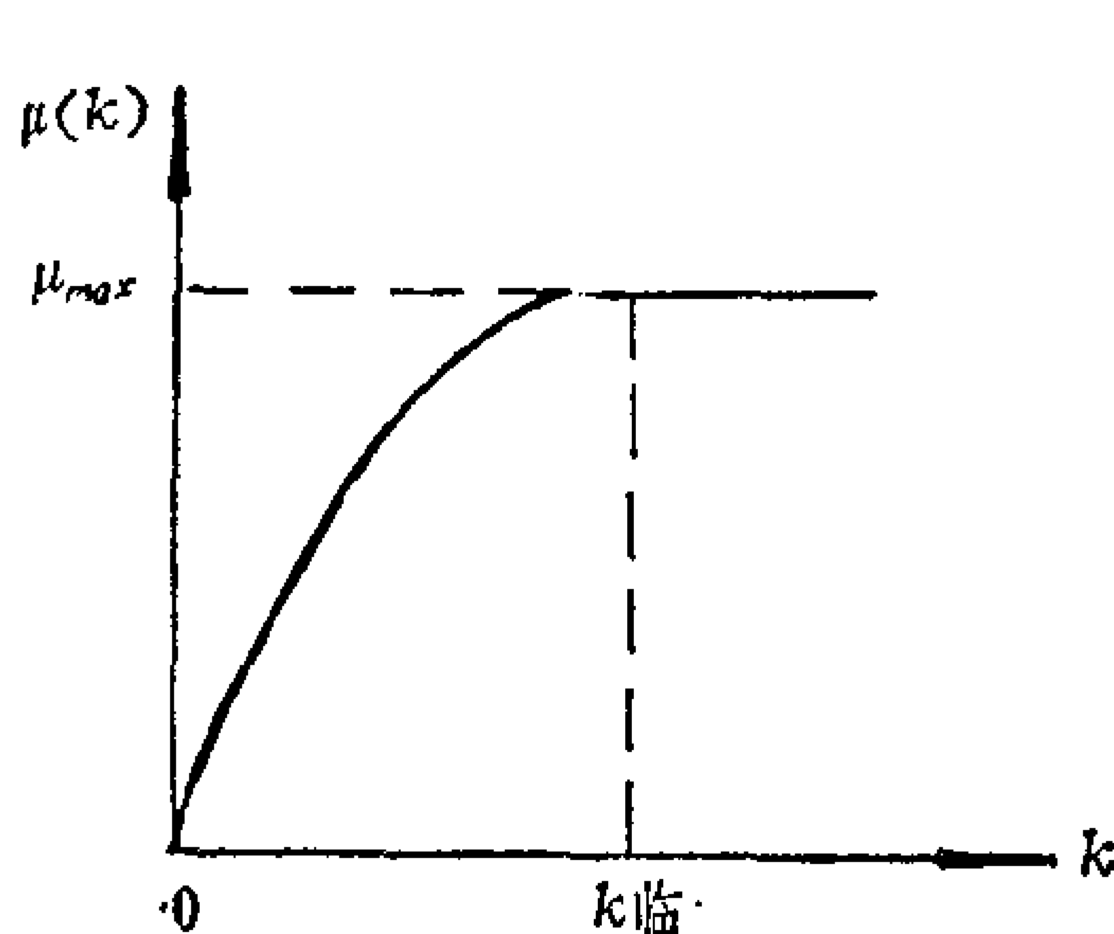


图7.17

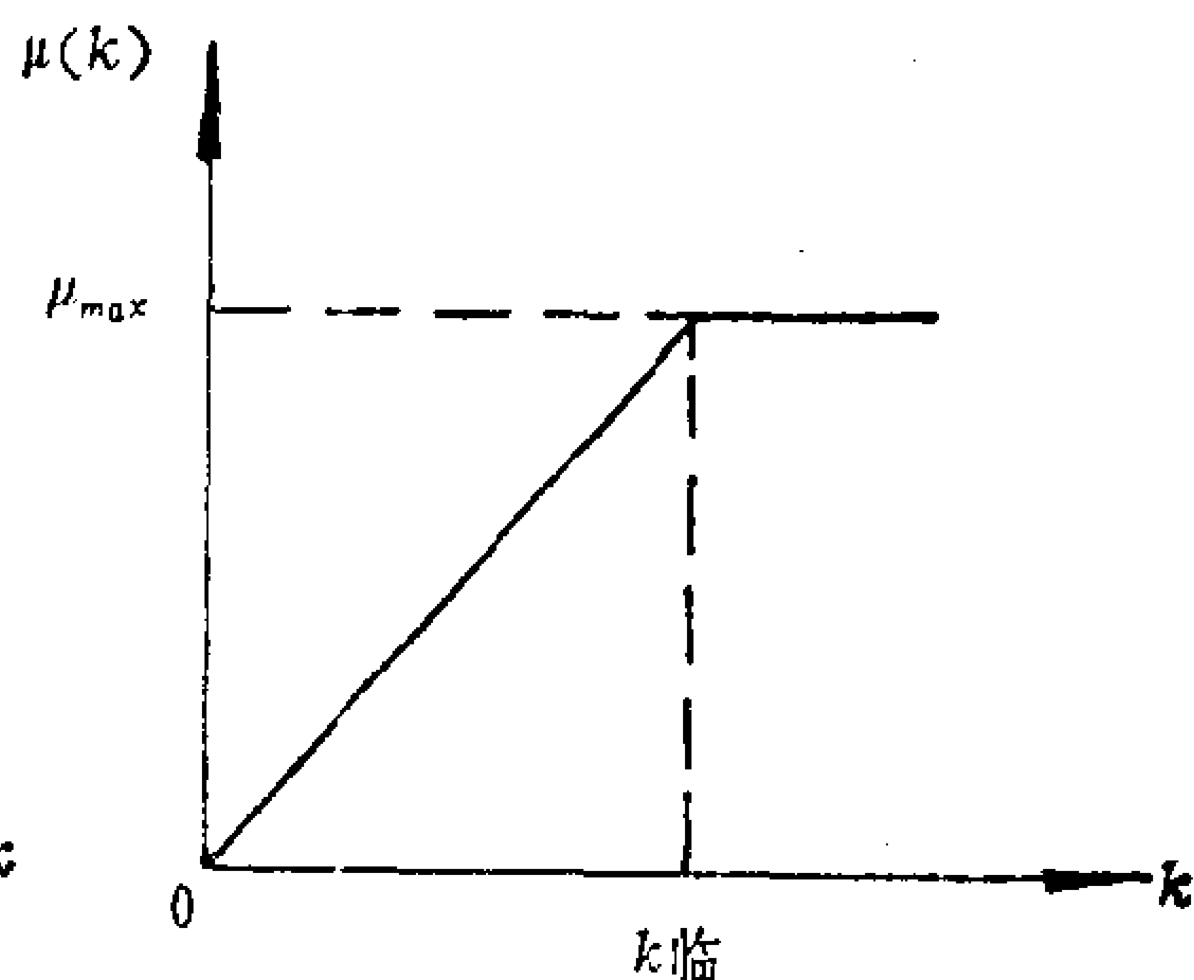


图7.18

显然，无限增加为同一个顾客服务的服务员数目，服务强度不是以直成比例加强的，或者说，有一个临界的数目，超过它，服务强度不再增大. 因而研究本模型时，首先需要给出函数$\mu(k)$.

最简单的情况：当$k \leqslant k_{临}$时，$\mu(k)$随着$k$的增大而正比例增强. 但当$k > k_{临}$时，$\mu(k)$成为常数，它等于$\mu_{max} = k_{临}\mu$. 如果服务员总共有$n$个，而相互帮助的服务员不能超过$k_{临}$. 即

$$n \leqslant k_{临}. \qquad (7.91)$$

式中 $k_{临}$—临界服务员数目.

这时，服务强度与服务员的数目正好成正比.

现在讨论第二个问题：互相帮助的原则. 最简单的情况是，

当顾客到来时，所有服务员为它服务。服务完毕后，大家再给另一个顾客服务。显然，这成了单通道服务系统。这样就有较大的服务强度。从而发生了问题，服务员之间互相帮助是否有利？回答这个问题应根据：顾客到达强度，函数$\mu(k)$的形式、排队系统的类型（等待制或损失制）、以及选用什么样的效率指标等条件。

**例题7.15** 有三个服务员的损失制系统。每分钟平均有4个顾客到达，即$\lambda=4$，函数$\mu(k)=k\mu$。试问，从系统通过能力的角度看，服务员之间互相帮助是否有利？从顾客在系统内停留时间看是否有利？

**解(a)** 服务员之间互不帮忙。本题为多通道损失制系统。

$n=3$，$\lambda=4$，$\mu=\dfrac{1}{0.5}=2$，

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=2。$$现在求服务员空闲着的概率

$$p_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}\right]^{-1}=\left[1+2+2+\frac{4}{3}\right]^{-1}=0.158。$$

损失概率 $$p_{损}=p_3=\frac{\rho^3}{3!}p_0=\frac{2^3}{3\times2}\times0.158=0.21。$$

系统相对通过能力

$$Q=1-p_{损}=0.79。$$

系统绝对通过能力

$$A=\lambda Q=4\times0.79=3.16。$$

顾客在系统内平均停留时间，它等于顾客获得服务的概率乘上服务的平均时间，即

$$w_{系}=(1-p_{损})\,\bar{t}_{服}=0.79\times0.5=0.395(分钟)。$$

不应该忘记，这是对所有顾客的平均停留时间而言，包括服务的顾客和没有被服务的顾客。而我们只对被服务的顾客感

兴趣。这时：

$$w_{\text{系}}^{\text{服}} = \bar{t}_{\text{服}} = 0.5(\text{分钟})。$$

(b) 服务员之间互助帮助时：$n^* = 1$（单通道），$\lambda = 4$，$\mu^* = 3\mu = 6$，$\rho^* = \frac{\lambda}{\mu^*} = \frac{2}{3}$。

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}; \quad p_1 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5};$$

$$p_{\text{损}} = p_1 = \frac{2}{5}; \quad Q = 1 - p_{\text{损}} = \frac{3}{5} = 0.6;$$

$$A = 4 \times 0.6 = 2.4。$$

$$w_{\text{系}} = p_1 \frac{1}{3\mu} = \frac{2}{5} \times 6 = 0.0667(\text{分})。$$

$$w_{\text{服}} = \frac{1}{3\mu} = 0.167\ (\text{分})。$$

以上计算表明：服务员之间互相帮助，使系统的通过能力明显减小。这是因为损失概率增加的缘故。当所有服务员为一个顾客服务时，后到的顾客，得不到服务而离去，但，顾客在系统内的停留时间还是减少了。因此，本模型适应于减少顾客在系统内的停留时间和系统。例如，对顾客有危险的系统，采用服务员之间互相帮助是有利的。

现在我们来研究等待制系统的情况。例如，无限排队系统。服务员之间互相帮助不会影响系统的通过能力，因为在任何情况下，顾客都可以得到服务，现它将影响等待特征：平均排队长度，平均等待时间，平均停留时间等。

**例题7.16** 系统内配有三个服务员，顾客到达强度$\lambda = 4$，服务强度$\mu = 2$，服务函数 $\mu(k) = k\mu$。($k_{\text{临}} = 3$)。试问在下列效率指标上是否有利？

**解**(a) 服务员之间互不帮助：这样本题为多通道等待制系

统：$n=3$，$\lambda=4$，$\mu=2$，

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=2, \quad \frac{\rho}{n}=\frac{2}{3}.$$

$$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3\times 2}+\frac{2^4}{3\times 2\times 1}\right]^{-1}=\frac{1}{9},$$

$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}=\frac{2^4\times\frac{1}{9}}{3\times 3\times 2\times\frac{1}{3^2}}=\frac{8}{9}=0.889,$$

$$w_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.889}{4}=\frac{2}{9}=0.222,$$

$$w_{系}=w_{队}+\bar{t}_{服}=0.222+0.5=0.722.$$

(b) 服务员之间相互帮助。这时，本题为单通道排队服务系统：$n^*=1$，$\lambda=4$，$\mu^*=3\mu=6$。

$$\rho^*=\frac{\lambda}{\mu^*}=\frac{2}{3}.$$

$$L_{队}=\frac{(\rho^*)^2}{1-\rho^*}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}=1.33.$$

$$w_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{1.33}{4}=0.333.$$

$$w_{系}=w_{队}+w_{服}=0.333+\frac{1}{6}=0.5.$$

上述计算表明：排队顾客的平均数和顾客平均排队时间，在相互帮助系统中较大，而顾客在系统内的平均停留时间较少，因此，根据顾客平均等待时间采用服务员之间互相帮助是不利的。如果我们改变服务原则，例如，如果所有服务员都正在为

一个顾客服务时，新来一个顾客，这时应立即分出一部分服务员为新到的顾客服务.问题在于当有新顾客到达时,应抽出多少服务员为它服务。显然，它取决于函数$\mu(k)$，如果函数是线性的，且$k_{临}>n$，则随意抽多少服务员都一样；如果$\mu(k)$是非线性的，则抽出来的服务员与留下来的服务员以均衡为好。

下面我们讨论多通道服务系统，采用上述服务原则时的情况。

在损失制系统里，系统的可能状态有：

$S_0$—系统空闲着；

$S_1$—所有服务员为一个顾客服务；

$S_2$—所有服务员为两个顾客服务；

………………………………

$S_k$—所有服务员为$k$个顾客服务；

……………………………

$S_n$—所有服务员为$n$个顾客服务。

系统状态转移图如下：

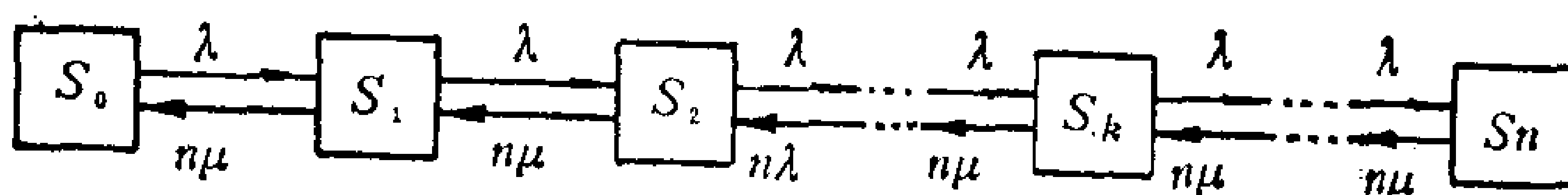



图7.19

由图可见，这和单通道，$\mu^*=n\mu$，排队长度限制在$(n-1)$时一样。因此，系统效率指标可以用本章§4相应的计算公式，并把$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$换成$\rho^*=\dfrac{\lambda}{n\mu}$.

$$p_{损}=\frac{\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^n\left(1-\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)}{1-\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{n+1}},$$

$$Q=\frac{1-\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{n}}{1-\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{n+1}},$$

$$A=\lambda Q.$$

**例题7.17** 某三通道损失制系统．$\lambda=4$，$\mu(k)=k\mu$．试比较$A$、$Q$和占用通道的平均数．

**解**(a) 服务员之间互不帮忙：

$$Q=0.79,\quad A=3.16,\quad \bar{k}=\frac{A}{\mu}=1.58.$$

(b) 按本节服务原则帮助：

$$\rho=\frac{\lambda}{n\mu}=\frac{2}{3},\quad Q=\frac{1-(\rho)^{3}}{1-\rho^{4}}=0.887,$$

$$A=4Q=3.51,\quad \bar{k}=\frac{3.51}{2}=1.76.$$

上述计算表明：采用本节提出的原则，展开服务员之间的互助，能够提高系统通过能力．当然，占用通道的平均数也有所增加．

在等待制系统内，排队最多的顾客数$m$，服务之间按本节提的原则展开互助．且$\mu(k)=k\mu$．

系统可能状态有：

$S_0$—系统空闲着；

$S_1$—所有服务员为一个顾客服务；

$S_2$—所有服务员为两个顾客服务；

……………………………

$S_k$—所有服务员为$k$个顾客服务；

……………………………

$S_n$—所有$n$个服务员为$n$个顾客服务；

$S_{n+1}$—$n$个服务员为$n$个顾客服务，有一个顾客排队；

…………………………………

$S_{n+m}$—$n$个服务员为$n$个顾客服务，有$m$个顾客排队。

系统状态转移图如下：

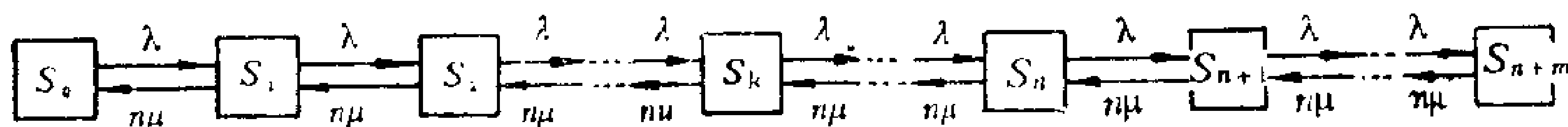



图7.20

由生、灭图可见，它是单通道混合制系统。它的服务强度$\mu^* = n\mu$，排队长度为$n+m-1$。其效率指标：

$$p_{损} = \frac{\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m}\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m+1}},$$

$$Q = \frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m}}{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m+1}},$$

$A = \lambda Q$。

**例题7.18** 计算条件同上例。排队长度$m=2$。试用不同的服务方式计算比较系统相对和绝对通过能力。

**解**(a) 服务员之间互不帮助。由例题（7.15）知

$Q = 0.79$。$A = 3.16$。

(b) 用本节提的互助原则：$n=3$，$\lambda=4$，

$\mu=2$，$\rho=2$，$\frac{\rho}{n}=\frac{2}{3}$，

$$Q = \frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^3}{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^4} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{57}{65} = 0.88,$$

$A = \lambda Q = 4 \times 0.88 = 3.52$。

读者还可以计算排队长度，平均等待时间，平均停留时间等。计算结果将会发现：采用这种互助方式，系统的效率指标和我们的愿望是一致的。当然，也不是对所有排队系统都一样。

## §16 有差错的服务系统

现实生活中，可能迂到这样的情况：顾客被接受服务后，服务的结果是错误的。例如，旅客在问讯处，有时得不到正确的回答。电话总机接错线路等。当然，这不是说，服务的结果都是错的，而只是说，服务的正确性有一定的概率$p\neq 1$。

有差错的服务系统，如果不是闭合式系统，对顾客流，没有什么影响。因为顾客的来源如此之大，很少的差错影响不了流的强度。但对系统的相对通过能力说，减少$p<1$，这里的$p$是无差错服务的概率，相应的，系统的绝对通过能力也降低$p$倍。对这种系统的其它效率指标，例如，顾客平均等待时间，排队长度等，也没有什么影响。但对闭合式系统，那就不一样了。例如，没有得到正确服务的顾客，重新排队，请求服务，这就增加了系统的负荷。

设有一个工人看管$n$台机床。这是单通道闭合式排队系统。如果工人在看管中有时发生差错。设一台工作着的机床发生故障的强度为$\lambda$，排除一台机床的故障，平均需要时间为$t_{服}=\frac{1}{\mu}$；排除故障的机床立即能生产的概率为$p$；显然，$(1-p)$表示机床虽然经过修理，但仍不能生产的概率，或者说修理没有成功的概率。该台机床重新排队，等待工人重新修理如果重新修理时间和原先的分布一样。试求状态极限概率。

系统生、灭图为：

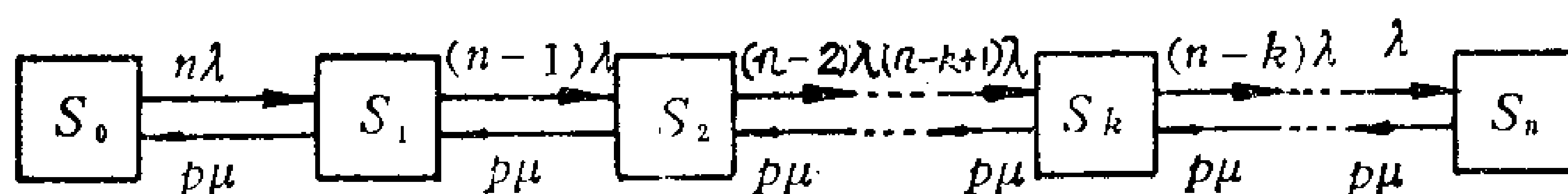



图7.21

图中，$S_0$—所有机床都在工作；

$S_1$—有一台机床发生故障；

$S_2$—有两台机床发生故障，其中一台在修理，另一台在排队，等待修理；

……………………………

$S_k$—有$k$台机床发生故障，其中$(k-1)$台在排队，等待修理；

……………………………

$S_n$—所有$n$台机床都发生故障，其中有$(n-1)$台机床在排队，等待修理。

图中，箭头线自右向左表示工人服务强度$p\mu$,这里$p$表示一次修成功的概率。例如，系统处于$S_k$状态，（有一台机床正在被修理，$(k-1)$台机床在排队，等待修理）。如果在$\Delta t$时间内，机床修理完了的概率为$\mu\Delta t$；但修理成功的概率只有$p$。即在已修理的条件下系统状态自$S_k$转移到$S_{k-1}$的条件概率只有$p$。显然，$1-p$表示修理不成功的概率，或者说，系统状态仍处于$S_k$的概率，也就是说修理成功的强度为$p\mu$。

注意到：本系统生、灭图和闭合式模型一样，(见图7.21)。不同的只是修理强度$\mu^*=p\mu$。因此，它们的计算公式可以通用。

**例题7.19** 一个工人看管三台织布机。每台织布机平均每小时发生两次故障。排除一台机器的故障，平均需要10分钟。如果修理成功的概率为$\frac{2}{3}$。求：占用工人的概率，绝对通过能

力，故障机器的平均数。

**解** 已知：$n=3$，$\lambda=2$，$\mu=6$，$p=\dfrac{2}{3}$，$p\mu=4$，

$\rho^{*}=\dfrac{\lambda}{p\mu}=\dfrac{1}{2}$。

$$\therefore \qquad p_0=\left[1+3\times\frac{1}{2}+3\times2\times\frac{1}{2^2}+3\times2\times\frac{1}{2^3}\right]^{-1}\approx0.211.$$

占用工人的概率 $p_{占}=1-p_0=0.789$。

绝对通过能力 $A=0.789\times4=3.16$。

故障机器的平均数：$\bar{\omega}=3-\dfrac{0.789}{\dfrac{1}{2}}=1.42$。

## § 17 串联排队服务系统

顾客在服务系统内需要通过一系列服务阶段的叫串联服务系统。例如，顾客到食堂吃饭先要买票然后进餐；列车到站经过技术检查后再上峰解体，流水作业线上，工件必须通过一系列工作点等。

我们先叙述两个连续的服务点，每个点上都只设一个服务员。每个服务阶段前都不允许排队。顾客按最简单流到达服务系统。前一个系统的输出流是后一阶段的输入流。服务时间都服从指数分布。第一个服务阶段服务强度$\mu_1$；第二服务阶段服务强度为$\mu_2$。这种模型的生、灭图（如图7—22）

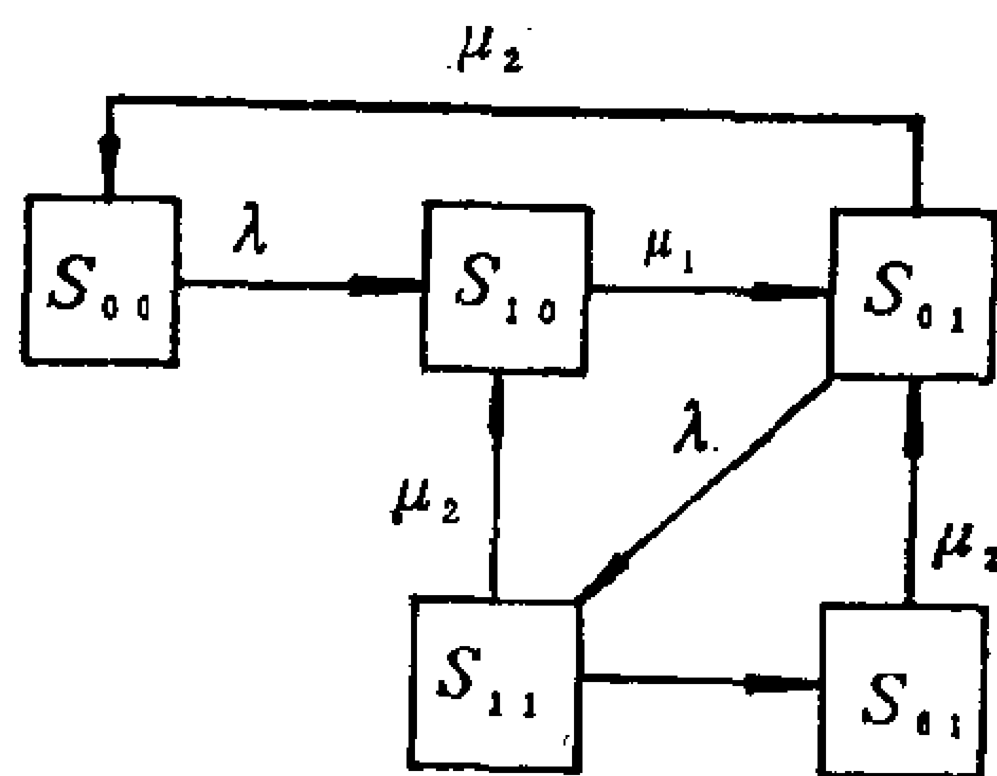


图7—22

图中 $S_{0,0}$—系统内没有顾客，服务员都闲着；

$S_{1,0}$—系统内有一个顾

客，在服务点1上接受服务，服务点2空闲着；

$S_{0,1}$—系统内有一个顾客，服务点1空闲着，在服务点2上正在为顾客服务；

$S_{1,1}$—系统内有两个顾客，分别在两个服务点上接受服务；

$S_{b,1}$—有一个顾客在服务点 2 上接受服务，服务点1上的顾也已服务完了，但不能进入下一个服务阶段。

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，直接写出极限状态概率代数方程：

$$\lambda p_{0,0} = \mu_2 p_{0;1},$$

$$\lambda p_{0,0} + \mu_2 p_{1,1} = \mu_1 p_{1,0},$$

$$\mu_1 p_{1,0} + \mu_2 p_{b,1} = (\lambda + \mu_2) p_{0,1},$$

$$\lambda p_{0;1} = (\mu_1 + \mu_2) p_{1;1},$$

$$\mu_1 p_{1;1} = \mu_2 p_{b,1}、$$

还有正则条件

$$p_{0,0} + p_{0,1} + p_{1,0} + p_{1,1} + p_{b,1} = 1.$$

解方程组可得

$$p_{1,0} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)}\right) p_{0,0},$$

$$p_{0,1} = \frac{\lambda}{\mu_2} p_{0,0},$$

$$p_{1,1} = \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} p_{0,0},$$

$$p_{b,1} = \frac{\mu_1 \lambda^2}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)} p_{0,0},$$

$$p_{0,0} = \left[\frac{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(\mu_1\mu_2+\lambda\mu_1+\lambda\mu_2)+\lambda^2(\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)}{\mu_1\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\right]^{-1}. \tag{7.92}$$

当 $\mu_1=\mu_2=\mu$时，

$$p_{1,0}=\frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{2\mu^2}; \quad p_{0,1}=\frac{\lambda}{\mu}p_{0,0};$$

$$p_{1,1}=\frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_{0,0}; \quad p_{b,1}=\frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_{0,0};$$

$$p_{0,0}=\frac{2\mu^2}{3\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}.$$

当 $\mu_1=\mu_2=\mu$时，系统效率指标：

1）系统内顾客的平均数

$$L_{系}=p_{0,1}+p_{1,0}+2(p_{1,1}+p_{b,1})=\frac{5\lambda^2+4\lambda\mu}{3\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}. \tag{7.93}$$

2）服务系统忙的概率（只要有一个服务点忙）

$$B=p_{0,1}+p_{1,0}+p_{b,1}+2p_{1,1}=\frac{4\lambda^2+4\lambda\mu}{3\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2} \tag{7.94}$$

3）系统损失的概率

$$p_{损}=p_{1,0}+p_{b,1}+p_{1,1}=\frac{3\lambda^2+2\lambda\mu}{3\lambda^2+4\lambda\mu+2\mu^2}. \tag{7.95}$$

当 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}\to\infty$时，$B\to\frac{4}{3}$.

因此，最大利用率为 $B=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$,

可用增加服务点2的排队长度可以减少服务点1产生堵塞的情况。若允许在服务点2之前可以有一个顾客排队位置,其它条件不变，则系统的状态有：

$S_{0,0}$—系统空闲着；

$S_{0,1}$—服务点1空闲着，服务点2正在为顾客服务。

$S_{0,2}$—服务点1空着，服务点2忙着，有一个顾客排队；

$S_{1,0}$—服务点1忙着，服务点2闲着；

$S_{1,1}$—两个服务点都忙着，没有顾客排队；

$S_{1,2}$—两个服务点都忙着，有一个顾客排队；

$S_{b,2}$—服务点2忙着，且有一个顾客排队，服务点1产生堵塞，即顾客被服务完了，但不能进入服务点2。

当$\mu_1=\mu_2=\mu$时，系统的极限概率为：

$$p_{0,1}=\frac{\lambda^2\mu+4\lambda\mu^2}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

$$p_{0,2}=\frac{2\lambda^2\mu}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

$$p_{1,0}=\frac{\lambda^3+3\lambda^2\mu+4\lambda\mu^2}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

$$p_{1,1}=\frac{\lambda^3+2\lambda^2\mu}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

$$p_{1,2}=p_{b,2}=\frac{\lambda^3}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3},$$

$$p_{0,0}=\frac{\lambda\mu^2+4\mu^3}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3}.$$

系统的效率指标：

1）系统内顾客的平均数.

$$L_{系}=\frac{9\lambda^3+12\lambda^2\mu+8\lambda\mu^2}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3},\tag{7.96}$$

2）忙着的服务员的平均数

$$B=\frac{6\lambda^3+10\lambda^2\mu+8\lambda\mu^2}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3}.\tag{7.97}$$

3）损失概率 $p_{损}=\dfrac{4\lambda^3+5\lambda^2\mu+4\lambda\mu^2}{4\lambda^3+8\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2+4\mu^3}.$ (7.98)

4）服务点1忙的概率

$$Q=p_{1,0}+p_{1,1}+p_{1,2}=\frac{1}{2}B.$$

5）服务点2忙的概率

$$Q_2 = p_{0,1} + p_{0,2} + p_{1,1} + p_{1,2} + p_{b,2} = \frac{1}{2}B.$$

当 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \to \infty$时，$B \to \frac{6}{4}$。

因此，设备最大利用率为$\frac{6}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$。由此可见，当服务点 2 之前有一个排队位置比不允许顾客排队时，服务效率提高$\frac{1}{12}$。

## （二）非马尔可夫过程的排队模型

至此，我们讨论的排队过程都是离散状态和连续时间的马尔可夫过程。或者说，贯穿于排队过程的所有事件流（顾客到达流，服务时间流和不耐烦顾客离去流等）都是服从指数分布的。所谓非马尔可夫过程就是作用在排队过程的流中，某一种流不服从指数分布。在实际生活中，作用于排队过程的事件流，往往与最简单流有较大出入。尤其是服务时间流，一般不服从指数分布。因此，严格地说，前面讨论的排队模型是不太恰当的。但，迄今，非马尔可夫过程的排队模型的解析性计算公式，除了几种简单的情况，其它的还没有得到，特别是多通道服务系统。下面我们讨论几种非马尔可夫过程的排队模型。

## §18 损 失 制

设多通道损失制服务系统。顾客按最简单流来到服务系统，具有参数$\lambda$。服务时间服从任意分布，其数学期望是

$$\bar{t}_{服} = \frac{1}{\mu} = \int_0^\infty tf(t)dt,$$

文献〔1〕证明，这种服务系统的极限状态概率和马尔可夫过程时完全相同，即

$$p_k=\frac{\rho^K}{K!}p_0,\ (K=0,\ 1,\ \cdots,\ n),\tag{7.99}$$

$$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right];\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda\bar{t}_{服}.\tag{7.100}$$

## § 19 M|G|1型

设服务系统内，只配备一个服务员．相邻顾客到达间隔时间服从指数分布，其强度为$\lambda$．服务时间为任意分布．美国数学家伯拉千克和苏联学者欣钦各自独立地得到了这种排队模型的效率指标：

顾客平均排队等待时间

$$W_{队}=\frac{\rho(1+v_{服}^2)}{2\mu(1-\rho)}\tag{7.101}$$

式中 $\rho$—系统的负荷，

$v_{服}$—服务时间的偏离系数。

系统内排队顾客的平均数为

$$L_{队}=\frac{\rho^2(1+v_{服}^2)}{2(1-\rho)}.\tag{7.102}$$

我们知道，指数分布的偏离系数$v_{服}=1$。

用$v_{服}=1$，代入公式(7.91)和(7.92)，得

$$W_{队}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)},\tag{7.103}$$

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}.\tag{7.104}$$

公式(7.103)和(7.104)我们是熟悉的．它们是单通道等待制排队模型的效率指标．(见第七章§3.)．

如果排队服务系统中，服务时间是固定的，

即 $v_{服}=0$。把它代入公式(7.101)和(7.102)得：

$$W_{队}=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}, \tag{7.105}$$

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}. \tag{7.106}$$

试比较公式(7.103)和(7.105)；公式(7.104)和(7.106)我们发现,它们的数相差$\frac{1}{2}$倍,即对相同的系统负荷$\rho$,$M/M/1$的$W_{队}$与$L_{队}$为$M/D/1$系统的$W_{队}$和$L_{队}$的2倍．

我们曾经对爱尔朗分布得到过公式

$$v=\frac{1}{\sqrt{K}}. \qquad \text{(见第三章§2)}$$

把 $v_{服}=\frac{1}{\sqrt{K}}$代入公式(7.101)和 (7.102)便可得到如下公式

$$W_{队}=\frac{\rho(1+k)}{2\mu(1-\rho)k}, \tag{7.107}$$

$$L_{队}=\frac{\rho^2(1+k)}{(1-\rho)2k}. \tag{7.108}$$

式中，$k$—服务时间的爱尔朗阶数．

**例题7.20** 矿石列车到达冶金工厂卸车．列车到达间隔时间服从指数分布．平均每隔 2 小时到达一次，$M(t)=2$。每列车由 30 辆车组成．卸车时间是$k=10$阶爱尔朗分布。平均每小时卸一列车.求平均等待卸车的时间和平均等待卸车的列车数!

**解**：每列车看作一个顾客．顾客到达强度

$$\lambda=\frac{1}{M(t)}=\frac{1}{2}=0.5\text{列/时}.$$

卸车强度：$\mu=1$列/时。

服务系统负荷： $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0.5}{1}=0.5$。

车列等待卸车时间

$$W_{队}=\frac{\rho(1+k)}{2\lambda k(1-\rho)}=\frac{0.5(1+10)}{2\times1\times k(1-0.5)}$$

$=0.55$小时。

平均等待卸车的车列：

$L_{队}=\lambda W_{队}=0.55\times0.5=0.275$列。

**例题7.21** 资料同上例。但列车到达间隔和卸车时间都服从指数分布。求$W_{队}$和$L_{队}$？

**解** $W_{队}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{0.5}{1\times0.5}=1$小时。

$L_{队}=\lambda W_{队}=1\times0.5=0.5$列。

由此可见，本题的$W_{队}$与$L_{队}$和上例中的答案近2倍。这说明，对同样的系统负荷，指数服务时间比爱尔朗服务时间系统差，因此，其效率也相应地低。

**例题7.22** 改编列车到达铁路编组站作业，到达流为最简单流，其强度为$\lambda=2$列/时，每列车平均作业时间为$\bar{t}_{服}=20$分钟，均方差为$\sigma(t_{服})$为8分钟。试求$L_{队}$及$L_{系}$。

**解** $\mu=\frac{1}{\bar{t}_{服}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$列/时。∴ $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{2}{3}$。

$$v=\frac{\sigma(t_{服})}{\bar{t}_{服}}=\frac{8}{20}=0.4。$$

$$\therefore\quad L_{队}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1+0.4^2\right)}{2\left(1-\frac{2}{3}\right)}=0.77(列)；$$

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.77}{2}=0.385(小时)。$$

$$L_{系}=L_{队}+\rho=0.77+\frac{2}{3}=1.437(列)。$$

## §20 $E_K|M|1$型

设顾单到达间隔时间服从$K$阶爱尔朗分布，服务时间为指数分布，单通道排队系统。

我们把顾客到达间隔时间分为$k$个独立的，且有相同的指数分布的位相。每个位相的平均时间为$\frac{1}{k\lambda}$，用图表示为。

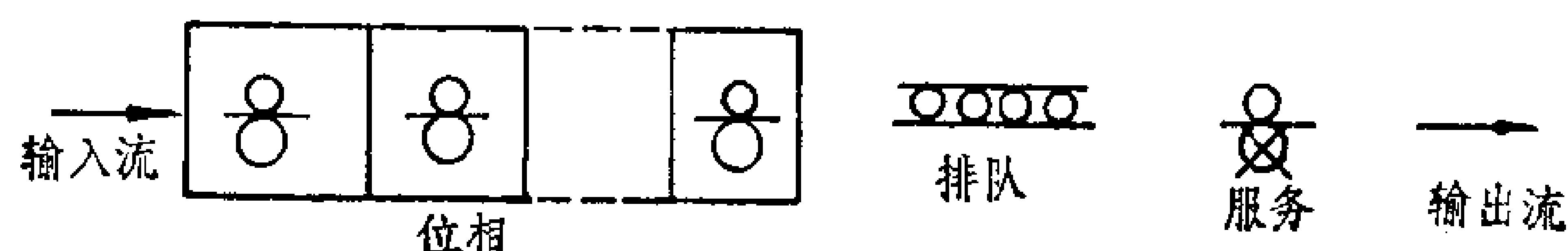



图7—23

我们只讨论极限平稳状态。设$p_{i,n}$表示在极限平稳状态时，有$n$个顾客在服务系统内，一个到来的顾客处于位相$i$(因为它尚未进入系统内，所以它不包括在$n$中)。$n\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant k$。根据状态概率哥尔莫哥尔夫方程一般法则，立即可以列出线性代数方程组。

$$\begin{cases}0=k\lambda p_{i-1,n}-(k\lambda+\mu)p_{i,n}+\mu p_{i,n+1}, & 2\leqslant i\leqslant k,\ n\geqslant 1.\\ 0=k\lambda p_{k,n-1}-(k\lambda+\mu)p_{1,n}+\mu p_{1,n+1}, & i=1,\ n\geqslant 1.\\ 0=k\lambda p_{i-1,0}-k\lambda p_{i,0}+\mu p_{i,1} & 2\leqslant i\leqslant k,\ n=0.\\ 0=-k\lambda p_{1,0}+\mu p_{1,1} & i=1,\ n=0.\end{cases}$$

这里前两个是排队方程，后两个是初始方程。我们令$p_{i,n}=B_i\omega^n$表示方程组解的形式。

把它代入方程组得：

$$(k\rho+1-\omega)B_i=kpB_{i-1},\quad 2\leqslant i\leqslant k.$$

$$(k\rho+1-\omega)\omega B_i=k\rho B_k,\ \text{其中}\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}.$$

从以上两个方程组得

$$B_i=\left(\frac{k\rho}{k\rho+1-\omega}\right)^{i-1}B_1,\qquad \omega=\left(\frac{k\rho}{k\rho+1-\omega}\right)^k.$$

于是有特征方程

$$\omega(k\rho+1-\omega)^k=(k\rho)^k.$$

显然，$\omega=1$是上方程的一个根。

因为$B_i$能表示为 $\mu=\dfrac{k\rho}{k\rho+1-\omega}$的方幂和常数$B_1$ 的乘积，且$u^k=\omega$。因而$p_{i,n}=Au^{kn+i-1}$。把它代入两个排队方程 均化为$(n>0)$后得

$$0=k\rho-(k\rho+1)u+u^{k+1}=(u-1)(u^k+u^{k-1}+\cdots$$
$$+u-k\rho),$$

从而 $$0=u^k+u^{k-1}+\cdots+u-k\rho.$$

能够证明：当$\rho<1$时，仅有一个根，在(0，1)之间。

系统内有$n$个顾客的概率为：

$$p_n=\sum_{i=1}^{k}p_{i,n}=Ar^{nk}(1-r^k)/1-r.$$

当$n=0$时，

$$p_0=\sum_{i=1}^{k}p_{i,0}=A\sum_{i=0}^{k-1}r^i-\frac{A}{k\rho}\sum_{i=1}^{k-1}ir^i$$
$$=\frac{A(1-r^k)}{1-r}-\frac{Ar[1-kr^{k-1}+(k-1)r^k]}{k\rho(1-r)^2}$$
$$=\frac{A[k\rho(1-r-r^k+r^{k+1})-r+kr^k-(k-1)r^{k+1}]}{k\rho(1-r)^2}.$$

$\because$ $$k\rho-(k\rho+1)r+r^{k+1}=0,$$

$\therefore \qquad p_0 = \dfrac{A[-k\rho r^k(1-r)+kr^k(1-r)]}{k\rho(1-r)^2} = \dfrac{A(1-e)r^k}{\rho(1-r)}.$

$\because \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$

$\therefore \qquad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \dfrac{A(1-\rho)r^k}{\rho(1-r)} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{A(1-r^k)}{1-r} r^{nk}$

$$= \frac{A(1-\rho)r^k}{\rho(1-r)} + \frac{Ar^k}{1-r} = \frac{Ar^k}{\rho(1-r)}.$$

故 $\qquad A = \dfrac{\rho(1-r)}{r^k}.$

因此， $\quad p_0 = 1-\rho,\ \ p_n = \rho(1-r^k)r^{(n-1)k},\ \ n \geqslant 1.$

现在求系统内顾客的平均数

$$L_{系} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho(1-r^k)r^{(n-1)k}$$

$$= \rho(1-r^k)\sum_{n=1}^{\infty} nr^{(n-1)k} = \rho(1-r^k)\frac{1}{(1-r^k)^2}$$

$$= \frac{\rho}{1-r^k}.$$

系统内顾客数的方差

$$D(L_{系}) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - L_{系}^2 = \frac{\rho(1-\rho+r^k)}{(1-r^k)^2}.$$

系统内排队顾客的平均数

$$L_{队} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

$$= L_{系} - (1-p_0) = \frac{\rho r^k}{1-r^k}.$$

系统内排队顾客数的方差

$$D(L_{队}) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2 P_n - L_{队}^2 = \frac{\rho r^k(1+r^k-\rho r^k)}{(1-r^k)^2}.$$

系统内顾客平均停留时间

$$W_{系}=\frac{1}{\mu(1-r^k)}.$$

顾客排队平均时间

$$W_{队}=\frac{r^k}{\mu(1-r^k)}.$$

**例题7.23** 设某排队服系统，顾客到达流为两阶爱尔朗流，服务时间为指数分布，系统内配备一个服务员．用图表示为：

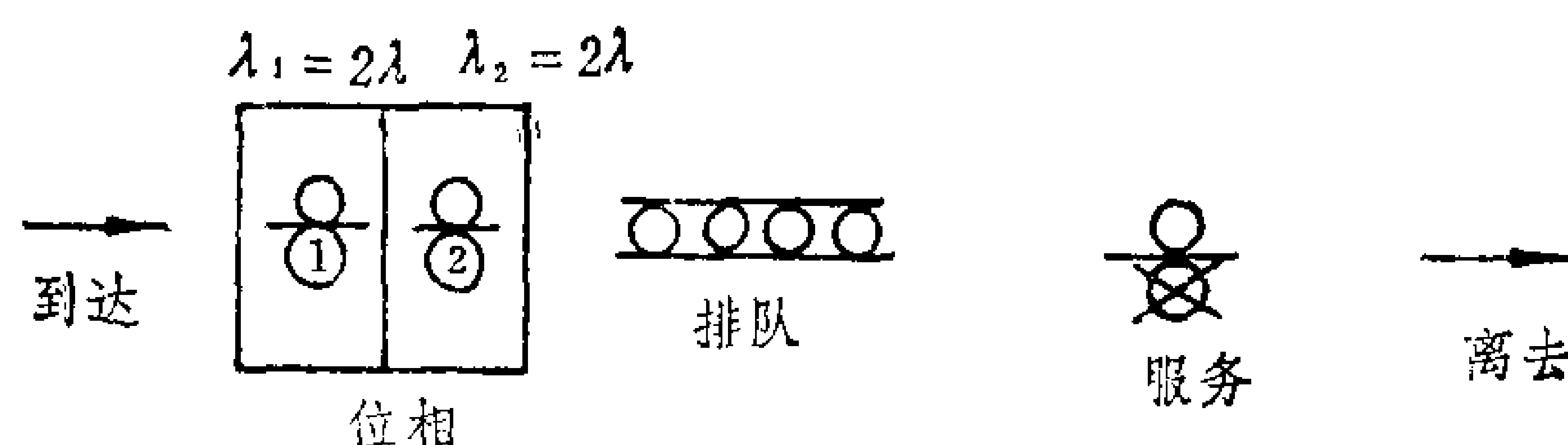



图7.24

设$t$时刻系统内有$n$个顾客的概率为$P_{i,n}$．即系统内有$n$个顾客时，正在被服务的顾客处于$i$($i=1$，2）位相．根据列状态概率线性方程的一般法则，可得：

$$\begin{cases} 2\lambda P_{n-1,1}+\mu P_{n+1,1}-(2\lambda+\mu)P_{n,1}=0, & n>0, \\ 2\lambda P_{n-1,2}+\mu P_{n+1,2}-(2\lambda+\mu)P_{n,2}=0, & n>0, \\ \mu P_{1,1}-2\lambda P_{0,1}=0, \\ 2\lambda P_{0,1}+\mu P_{1,2}-2\lambda P_{0,2}=0. \end{cases}$$

令 $P_{ni}=B_i\omega^n,\quad \left.\begin{matrix} n>0, & i=1,\ 2 \\ n=0 & i=2 \end{matrix}\right\}|\omega|<1$把它代入前两个方程式，可得到系统方程，从而求系数$B_i$．

即 $\omega(2\rho+1-\omega)^2=(2\rho)^2$.

式中，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$．该方程的根的绝对值小于1．且给出一个解．即

$$\omega_1=\frac{1+4\rho-\sqrt{1+8\rho}}{2},$$

从而可得一般形式

$$B_2 = \frac{4\rho}{1+\sqrt{1+8\rho}} B_1.$$

∵ $$\sum_{n=0}^{\infty}(P_{n,1}+P_{n,2}) = 1,$$

因而， $$P_{n,i} = \frac{1+2\rho+(1-2\rho)\sqrt{1+8\rho}}{8\rho}\left(\frac{\sqrt{1+8\rho}-1}{2}\right)^{2n+i-1}.$$

$n>0$，$i=1$，2，$n=0$，$i=2$。

及 $$P_{01} = \frac{3-\sqrt{1+8\rho}}{4}.$$

最后，$P_n = P_{n,1} + P_{n,2}$

$$= \frac{\rho(1-4\rho+\sqrt{1+8\rho})(1+4\rho-\sqrt{1+8\rho})^{n-1}}{2^n}.$$

$n>0$，$P_0 = 1-\rho$。

$$L_{系} = \frac{2\rho}{1-4\rho+\sqrt{1+8\rho}}.$$

**例题7.24** 一台机器加工零件，加工时间服从指数分布，平均加工时间$\frac{1}{\mu}=12$分钟。据实测资料工件平均每小时到达4件，方差为110分；工件到达间隔时间服从爱尔朗分布。求效率指标

**解** $\frac{1}{\mu}=12$分/件，$\mu=5$件/时，$\lambda=4$件/时。

∴ $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{5}=0.8$，故$k=\frac{M^2(T)}{D(T)}=\frac{15^2}{110}=2.045$。

我们取$k=2$。

我们先从 $u^k+u^{k-1}+\cdots+u-k\rho=0$中求$r$。

∵$k=2$，∴ $u^2+u^1-2\times0.8=0$。

故 $r^k + r^{k-1} + \cdots + r = k\rho < k$,

即 $r^2 + r = 2 \times 0.8 < 2$.

从而求得$r = 0.86$

$$P_0 = 1 - \rho = 0.2,$$

$$P_n = \rho(1 - r^k)r^{(n-1)k} = 0.8(1 - 0.86^2)0.86^{2(n-1)},$$

$$n \geqslant 1,$$

$$L_{系} = \frac{e}{1 - r^k} = \frac{0.8}{1 - 0.8^2} = 3.07.$$

$$L_{队} = \frac{er^k}{1 - r^k} = \frac{0.8 \times 0.86^2}{1 - 0.86^2} = 2.99.$$

$$W_{系} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - r^k} = 16.2(分钟).$$

$$W_{队} = W_{系} - \frac{1}{\mu} = 4.2(分钟).$$

## §21 几个公式的推导（初等解法）

**定义**

$N$：一个顾客刚离去的瞬间，系统内的顾客数（我们把离去的顾客编为0号）；

$T$：0号顾客离去的瞬间，下一个顾客（我们把它编为1号）的服务时间（从0号顾客离去时，开始计时）；

$K$：在1号顾客被服务的时间内，新进入服务系统的顾客数；

$N'$：1号顾客服务完毕而离去时，留在系统内的顾客数。

设服务系统中只有一个服务员，顾客按最简单流到达。服务时间为一般分布。即$M|G|1$型。

如果$n > 0$，则$n' = n + K - 1$；

如果$n=0$，则$n'=K$。

如果$n=0$，则在系统内有一个“想像”的顾客服务完毕时，并无离去的顾客，因此，$n'$ 正好等于时间$t$内，到达系统的顾客数。

令 参数$a$。如果$n=0$，$a=1$；

如果$n>0$，$a=0$；

于是对所有$n$有：

$$n'=n+K+a-1, \tag{1}$$

当 $t\to\infty$时，即在极限平稳状态下：

$M(N)=M(N')$即 0 号顾客离去瞬间，系统内的顾客数（随机变数）的期望值等于 1 号顾客去时，留在系统内的顾客数（随机变数）的期望值。简单地说，在极限平稳状态下，进入系统的顾客平均数等于离开系统的顾客平均数。

同理。$M(N^2)=M(N)^2$，

$\therefore$ $M(N')=M(N)+M(K)+M(a)-1$，

$\because$在稳态下，$M(N)=M(N')$，

$$\therefore \quad M(a)=1-M(K), \tag{2}$$

对(1) 式取平方得

$$(n')^2=(n+K+a-1)^2=n^2+a^2+(K-1)^2$$
$$+2an+2n(K-1)+(2a)(K-1).$$

$\because$ $a$值不是0，便是1。

$\therefore$ $a=a^2$，$an=0$。

$$\therefore \quad (n')^2=n^2+a+(K-1)^2+2n(K-1)+2a(K-1)$$
$$=n^2+a+K^2-2K+1+2n(K-1)+2aK-2a$$
$$=n^2+K^2-2K+2nK-2n+2aK-a+1.$$

$\because$ $(N')^2$的期望值为

$$M[(N')^2]=M(N^2)+M(K^2)-2M(K)$$

$$+2M(N)M(K)-2M(N)+2M(a)M(K)$$
$$-M(a)+1. \qquad (3)$$

又因 $\quad M(N')^2=M(N^2)$

∴(3) 式为$2M(N)-2M(N)M(K)=M(K^2)-2M(K)+2M(a)M(K)-M(a)+1. \qquad (4)$

将(2)代入(4) 得

$$2M(N)[1-M(K)]=M(K^2)-2M(K)+2[1-M(K)]M(K)-[1-M(K)]+1,$$

或

$$M(N)=\frac{M(K^2)-2[M(K)]^2+M(K)}{2[1-M(K)]}. \qquad (5)$$

由(5) 可知，只要知道$M(K^2)$和$M(K)$即可得到$M(N)$。因为顾客到达流是最简单流，所以有

$$M(K)=\lambda t,$$
$$M(K/t)=\lambda t.$$

我们知道，当$t$给定后，$K^2$的期望值等于$K$的方差加$K$的期望值的平方。

又因为最简单流的方差为

$$D(t)=\lambda t,$$
$$M\left(\frac{K^2}{t}\right)=\lambda t+(\lambda t)^2.$$

$$\therefore \qquad M(K)=\int_0^\infty M(K/t)f_T(t)dt$$
$$=\int_0^\infty \lambda t f_T(t)dt$$
$$=\lambda\int_0^\infty t f_T(t)dt.$$

$$\because \qquad \int_0^\infty t f_T(t)dt=M(T),$$

$\therefore \qquad M(K)=\lambda M(T)$。 (6)

而 $$M(K^2)=\int_0^\infty M(K^2/t)f_T(t)dt$$

$$=\int_0^\infty[\lambda t+(\lambda t)^2]f_T(t)dt$$

$$=\int_0^\infty \lambda t\cdot f_T(t)dt+\int_0^\infty(\lambda t)^2 f_T(t)dt$$

$$=\lambda M(T)+\lambda^2\int_0^\infty t^2 f_T(t)dt.$$

$$=\lambda M(T)+M(T^2)$$

$$=D(T)+[M(T)]^2.$$

$\therefore \qquad M(K^2)=\lambda M(T)+\lambda^2 D(T)+\lambda^2[M(T)]^2$。 (7)

把(6)和(7) 代入(5)得:

$$M\ (N)=\frac{\lambda M(T)+\lambda^2 D(T)+\lambda^2[M(T)]^2-2\lambda^2[M(T)]^2+\lambda M(T)}{2[1-\lambda M(T)]}$$

$$=\frac{\lambda^2\{D(T)+[M(T)]^2\}+2\lambda M(T)[1-\lambda M(T)]}{2[1-\lambda M(T)]},$$

即 $$M\ (N)=\lambda M(T)+\frac{\lambda^2\{D(T)+[M(T)]^2\}}{2[1-\lambda M(T)]}. \qquad (8)$$

$N$的期望值就是服务系统内顾客平均数$L_{系}$。所以，公式 (8)给出了最简单流，一般分布的服务时间的$L_{系}$值。

因为服务时间 $T$的数学期望为$\frac{1}{\mu}$,即$M(T)=\frac{1}{\mu}$。

所以 $\qquad L_{队}=L_{系}-\lambda M(T)$。

因而，公式(8)可以写成:

$$L_{系}=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2\left\{D\ (T)+\frac{1}{\mu^2}\right\}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}. \qquad (9)$$

∵ $$D(T)=\sigma^2(T)=\nu^2(T)\cdot M^2(T)=\nu^2(T)\frac{1}{\mu^2},$$

∴ $$L_{系}=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2\left\{\frac{\nu^2(T)}{\mu^2}+\frac{1}{\mu^2}\right\}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}+\left\{\frac{\lambda^2\cdot\nu^2(T)}{\mu^2}+\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right\}\Big/2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2/\mu^2(1+\nu^2(T))}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

令 $$\frac{\lambda}{\mu}=\rho.$$

则 $$L_{系}=\rho+\frac{\rho^2[1+\nu^2(T)]}{2(1-\rho)}. \tag{10}$$

我们知道：当顾客到达流为最简单流，服务时间为指数分布时，$L_{系}=L_{队}+\rho$。

而 $L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}$。由此可见，当顾客到达流为最简单流，服务时间为一般分布时。

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{(1-\rho)}\ \frac{1+\nu^2}{2}. \tag{11}$$

现在我们看服务时间为常数时，即服务时间的方差 $D(T)=0$。因而(9)式写成

$$L_{系}=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2\left\{0+\frac{1}{\mu^2}\right\}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{\frac{\lambda^2}{\mu^2}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

令 $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$，则

$$L_{系}=\rho+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}. \tag{12}$$

或　顾客到达流为最简单流，服务时间为定长分布时，顾客在系统内排队等待顾客的期望值为：

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{13}$$

现在我们看服务时间为爱尔朗分布时。

即　$M|E_K|1$型。

因为服务时间为爱尔朗分布时。

$$M(T)=\frac{1}{\mu},\ D(T)=\frac{1}{K\mu^2}\ （K—爱尔朗阶数）。$$

∴　公式(8) 可以写成：

$$L_{系}=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2\left(\frac{1}{K\mu^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2\left(\frac{1+K}{K\mu^2}\right)}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$=\rho+\frac{1+K}{2K}\ \frac{\rho^2}{(1-\rho)}, \tag{14}$$

即

$$L_{队}=\frac{1+K}{2K}\ \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{15}$$

为了应用方便，我们把单通道，最简单流，不同分布的服务时间的效率指标公式汇总于表(10.1)

现在我们求$D(L_{系})$。

$$D(L_{系})=\sum_{n=0}^{\infty}(n-L_{系})^2P_n$$

$$=\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}-\frac{(K-1)\lambda^2}{12K^2(\mu-\lambda)^2}\left[18K+12-(10K-4)\frac{\lambda}{\mu}+(K-5)\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right].$$

当$K=1$时，$D(L_{系})=\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}$，

$K=2$时，$D(L_{系})=\frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}-\frac{\lambda^2}{48(\mu-\lambda)^2}\left[48-16\frac{\lambda}{\mu}-3\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right]$，

$K\to\infty$时，$D(L_{系})=\frac{\lambda}{12(\mu-\lambda)^2}\left[12\mu-18\lambda+10\frac{\lambda^2}{\mu}-\frac{\lambda^3}{\mu^2}\right]$，

顾客排队等待时间的方差为：

$$D(W_{队})=\frac{\rho}{\mu^2(1-\rho)}\cdot\frac{1+K}{K}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1+K}{4K}+\frac{K+2}{3K}\right)，$$

# 第八章　统计试验法

至此，我们讨论了排队问题的数学模型，即在已知条件和必然结果之间建立了解析性关系．但不能忘记，建立这种关系的条件是马尔可夫随机过程．在实物系统中，顾客到达流不都是最简单流，特别是服务时间更不都是指数分布．因此，排队问题的求解，需要有更一般的方法，这就是统计试验法或叫蒙特-卡罗法．

本章讨论统计试验法的基本思想及其在排队论中的应用．

## §1　基本思想

统计试验法的思想十分简单．它是对随机现象，按一定的程序进行抽签试验．每次抽签试验得到一次随机结果．如果进行了大量试验，就可以得到大量的随机结果．这和统计大量的数据一样．按统计试验法的实质可以求解任何概率问题．但实际工作中，只当试验方法简单易行，且用解析法难于解决甚至有时不可能解决的问题．

用蒙特-卡罗法模拟某个随机现象时，基本要素是模拟现象的一个随机现实．如对空中目标的一次攻击；驼峰解体一个车列等等．每个现实都是通过抽签试验随机地取得的．随机性影响着抽签试验的结果，即影响每一个现实，这种影响是无法用解析计算法来考虑的．

蒙特-卡罗法是用抽签试验法确定系统的运行指标的．什么

叫抽签试验呢？我们可以用下面的例子来说明：设对某个目标独立地进行四次射击，每次射击，击中目标的概率$P=0.5$。若击中两次以上，目标被摧毁．求目标被摧毁的概率．这可用两种方法求解：

a）解析计算；

b）抽签试验。

我们先用解析法计算．通过对立事件（即目标不被击毁）的概率．击中二次和击中少于二次是对立事件．击中少于二次或只击中一次就是没有击毁．四次射击中没有击中的概率为：

$$P_4(0)=c_4^0P^0(1-P)^{4-0}=(1-0.5)^4=0.5^4;$$

击中一次的概率为

$$P_4(1)=c_4^1P^1(1-P)^{4-1}=4\times0.5^4,$$

因此，击中少于二次的概率为

$$P(<2)=0.5^4+4\times0.5^4=0.332;$$

所以，击中大于二次的概率为

$$P(>2)=1-P(<2)=1-0.332=0.668.$$

现在用抽签试验法解决同一问题．用抛掷四枚硬币表示四次射击．如果每次抛掷硬币时出现正面，则表示击中目标，出现反面表示未击中目标．如果抛掷的四枚硬币中至少有二枚出现正面，则目标被击毁．我们连续地、大量地进行这种试验，每次抛掷四个硬币．根据贝努里定理，目标被击毁的频率将趋近于这个事件的概率．如果总共抛掷$N$次，其中有两个以上硬币出现正面的次数为$n$．则出现两次以上正面的频率为：

$$W(>2)=\frac{n}{N}.$$ 它的数值为0.688。

再举一例．轰炸某个目标，如果炸毁面积达到$K\%$时，则该目标被摧毁；如果一颗炸弹的杀伤半径为$R$，即每投一颗炸

弹可以画出以$R$为半径的圆。如图(8.1)所示。

当投$N$颗炸弹后，图中阴影部分的面积达到$K\%$，则目标被摧毁。根据大数定理，在大量试验中算术平均值与数学期望很少区别。如果目标被炸伤的面积为$S_P$，它的数学期望为$M(S_P)=\bar{S}_P$而算术平均值$\bar{S}_P=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S_{Pi}$。

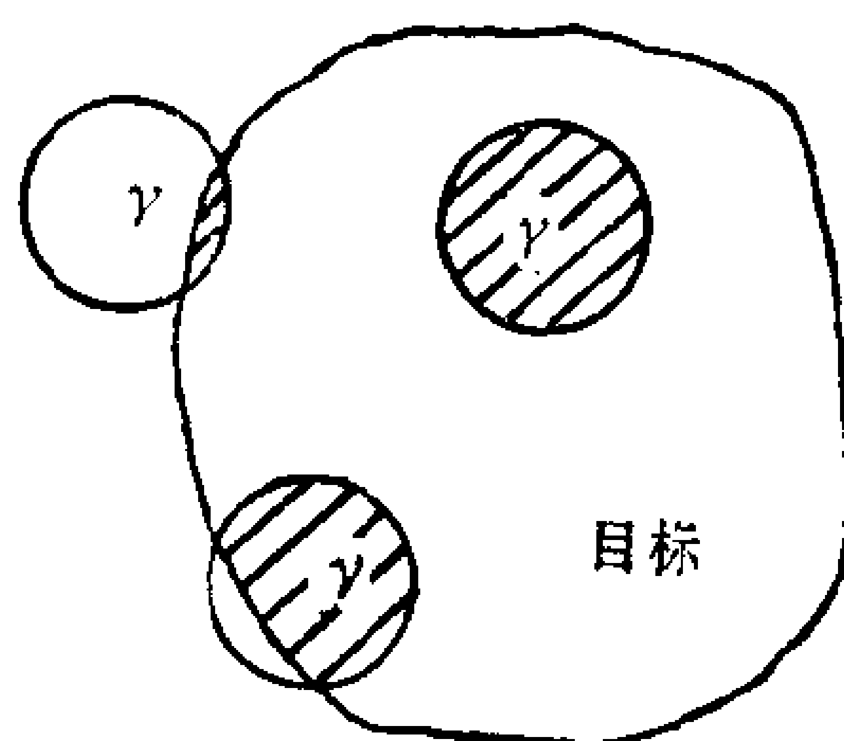


图8.1

用统计试验法不仅可以求到平均数，而且可以求到它的方差。因为方差取值是对数学期望差的平方的平均值，即

$$D(S_P)=M\ (S_P-\bar{S}_P)^2\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ (S_{Pi}-\bar{S}_P)^2.$$

因此，蒙特-卡罗法在排队论中是随机现象的数学模拟方法。因此，单位抽签试验就是一次经验的结果。每次经验都有随机性，但在大量经验的平均数中体现随机现象的规律性。

为了获得抽签试验的结果，要用到在0，1之间具有均匀分布密度的随机数。

## §2　离散随机变数的模拟

设随机变数$X$，试模拟它的$n$个可能值$x_i$，求它们的算术平均值。

$$\overline{x}=\frac{\Sigma x_i}{n},$$

并用$\overline{x}$作为$a$的估计值$a^*$：即

$$a\simeq a^*=\overline{x}.$$

因此，应用蒙特-卡罗法必须学会模拟随机变数。

设已知X的分布律，求X的可能值$x_i$($i=1,2,\cdots$) 这时引入符号$R$——在(0,1) 区间内均匀分布的随机数；$r_j$($j=1, 2,\cdots$)——$R$的可能值。X的分布律为：

$X$　$x_1$，　$x_2$，　$\cdots$，　$x_n$，

$P$　$p_1$，　$p_2$，　$\cdots$，　$p_n$。

1) 把$or$轴分成$n$个区间：$\Delta_1$—(0；$p_1$)，$\Delta_2$—($p_1$；$p_1+p_2$)$\cdots$，$\Delta_n$—($p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}$，1)。

2) 自随机数表中任意取随机数$r_j$。如果$r_j$落在$\Delta_i$区间内，则模拟的值作为可能值$x_i$。

**例题8.1**　模拟离散随机变数X的六个可能值。X的分布律为：

| $X$ | 2 | 10 | 18 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.22 | 0.17 | 0.61 |

**解**　把$or$轴上(0,1)区间分成三个区间：$\Delta_1$—(0，0.22)；$\Delta_2$—(0.22，0.39)；$\Delta_3$—(0.39,1)。

2) 在随机数表（附录4）任取六个值：如，0.32；0.17；0.90；0.05；0.97；0.87。

随机值$r_1=0.32$属于$\Delta_2$区间内，因此，模拟的离散随机可能值$x_2=10$；随机值$r_2=0.17$属$\Delta_1$区间内，因而 $x_1=2$。

同理，模拟得到六个可能值：10,2,18,2,18,18。

下面讨论对完备事件组的模拟.若事件发生的概率为已知，则在每次试验中，必然发生完备事件之一.完备事件组的模拟，实质上，是对随机变数的模拟。设离散随机变数X的分布律为：

$X$　1，　2，　$\cdots$，　$n$；

$P$　$p_1$，$p_2$，　$\cdots$，$p_n$。

在每次试验中发生完备事件$A_1$,$A_2$,$\cdots$，$A_n$之一。如在试验中X的取值$x_i=i$，则事件$A_i$发生。

**例题8.2** 由$A_1, A_2, A_3$组成完备事件组。$p_1 = p(A_1) = 0.22$，$p_2 = p(A_2) = 0.31$，$p_3 = p(A_3) = 0.47$。模拟五次，每次发生一个事件。

**解** 已知$X$的分布律为：

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.22 | 0.31 | 0.47 |

把（0，1）区间分成：$\Delta_1$—(0；0.22)；$\Delta_2$—(0.22；0.53)；$\Delta_3$—(0.53；1)．在随机数表中任取五个数：0.61；0.19；0.69；0.04；0.46。随机值$r_1 = 0.61$在$\Delta_3$范围内，因此，$x_3 = 3$，即事件$A_3$发生。同理找到其它事件的发生．事件发生的序列：$A_3, A_1, A_3, A_1, A_3$。

**例题8.3** 在某编组站实观测，驼峰解体车列中平均有20％的车列挂有禁止溜放的车辆。凡挂有禁溜车辆的车列，其解体时间增加5分钟。试建立车站作业符合这种条件的模型。已知：车列推峰速度的分布律：

| $X\left(\frac{v_i}{\bar{v}}\right)$ | 0.54 | 0.80 | 0.98 | 1.08 | 1.15 | 1.45 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P\left(\frac{v_i}{\bar{v}}\right)$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |

车列平均推峰速度$\bar{v} = 8$公里/时。

**解** 我们把推峰速度分布律分为下列区间：

0.54—0.80；0.80—0.98；0.98—1.08；

1.08—1.15；1.15—1.45。

0—0.2；0.2—0.4；0.4—0.6；0.6—0.8；0.8—1.0。

在随机数表中任取一个数$R = 0.135$。它位于区间$p = 0$—0.2之间。我们应用下式关系求相应的$x$。

即 $\frac{0.8-0.54}{0.8-x}=\frac{0.2-0.0}{0.2-R}=\frac{0.2-0.0}{0.2-0.135}$,

∴ $x=0.7155$.

这时，第$i$趟车列的推峰速度为 $v_i=\bar{v}\cdot x=8\times0.7155=5.8$公里/时。以此类推，可求得所有车列的推峰速度。

## §3 确定给定分布律的间隔时间

排队问题中的首要问题是顾客到达间隔和服务时间。如果顾客到达间隔是相等的，则只要知道第一个顾客到达的时刻就可以知道以后的顾客到达时刻。但现实的顾客流，往往不是均衡的，而是服从某种概率分布的。

为了描述给定分布律的间隔时间，可以用随机数表（附录4）。随机数表中的数字在0,1之间为均匀分布。

设 $f(y)=1, 0\leqslant y\leqslant 1$，只要令$y=F(x)$，其中$F(x)$是$X$的分布函数，在0,1之间均匀分布。例如，指数分布，

$F(t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt=1-e^{-\lambda t}$在0,1之间均匀分布。指数分布只有一个参数$\lambda$。因而，它可以写成

$$R=1-e^{-\lambda t} \text{ 或 } e^{-\lambda t}=1-R.$$

两边取对数：$-\lambda t\ln e=\ln(1-R)$.

∵ $\ln e=1$ ∴ $-\lambda t=\ln(1-R)$,

即 $t=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)=-\frac{1}{\lambda}\ln R$.

式中 $\frac{1}{\lambda}$—顾客平均到达间隔时间。

$\ln R$—随机数R的自然对数，在0,1之间均匀分布。

不同的$\lambda$表示不同的指数分布。

例题（8.4） 如果顾客到达间隔服从指数分布。单位时间内平均有$\lambda=4$个顾客到达。试模拟该过程。

**解** 因为$\lambda=4$ 所以$F(t)=1-e^{-4t}$。

模拟步骤如下：(1) 设横座标为时间$t$；纵座标为相应的分布函数。作出分布函数的直角座标；(2) 在随机数表中任取一个值，例如，$R=0.45$ 自$R$处作$X$轴的平行线与分布函数交于一点。从该点起，作纵座标的平行线，与$X$轴交于一点，得$t=0.15$(小时)＝9分钟(见图8.2)。依此类推，可以得到顾客到达间隔时间$t$的很多值.然后根据一般的数理统计方法求到平均间隔时间，方差和均方差等

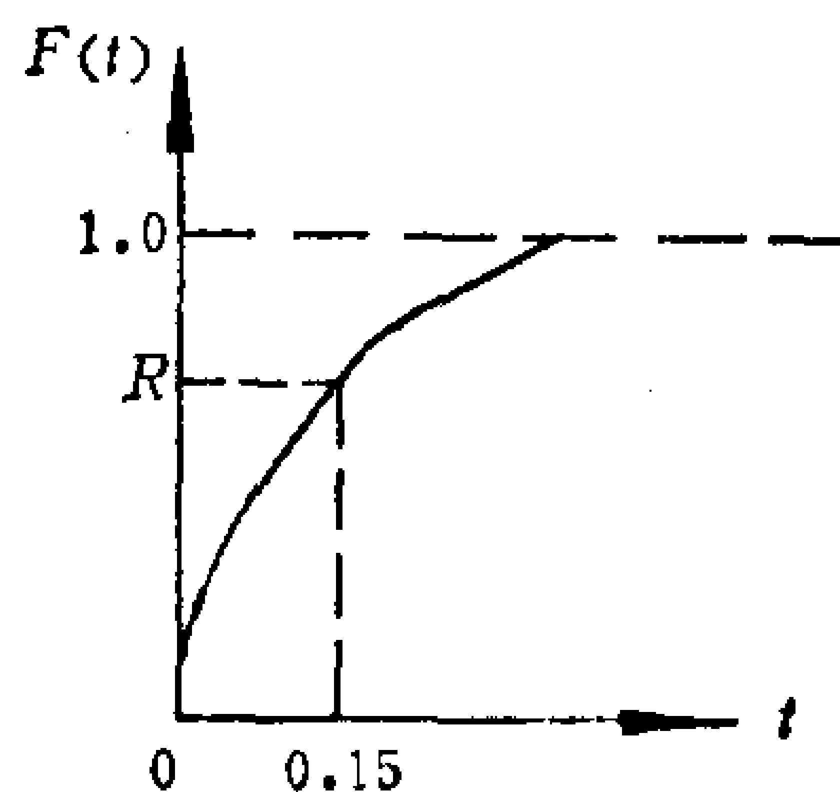



图8.2

**例题8.5** 设总体服从指数分布

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}.$$

总体均值$\frac{1}{\lambda}=10$，试从总体分布中模拟$n=20$个可能值。

**解** 令$R=F(x)=1-e^{-\lambda x}$，$e^{-\lambda x}=1-R$.

两边取对数：$-\lambda x\ln e=\ln(1-R)$,

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)=-10\ln(1-R)=2.306\log R.$$

在随机数表中任取20个数，模拟结果如表所列。

| $R$ | $1-R$ | $\log(1-R)$ | $x=-10\times2.3026\log(1-R)$ | $R$ | $1-R$ | $\log(1-R)$ | $x=-10\times2.3026\log(1-R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.72 | 0.28 | -0.5528 | 12.73 | 0.54 | 0.46 | -0.3372 | 7.76 |
| 0.04 | 0.96 | -0.0177 | 0.41 | 0.72 | 0.28 | -0.5528 | 12.73 |
| 0.48 | 0.52 | -0.2840 | 6.54 | 0.01 | 0.99 | -0.0044 | 0.10 |
| 0.16 | 0.84 | -0.0757 | 1.74 | 0.89 | 0.11 | -0.9586 | 22.07 |
| 0.29 | 0.71 | -0.1487 | 3.42 | 0.74 | 0.26 | -0.5850 | 13.47 |
| 0.83 | 0.17 | -0.7696 | 17.72 | 0.42 | 0.58 | -0.2366 | 5.45 |
| 0.51 | 0.49 | -0.3098 | 7.13 | 0.59 | 0.41 | -0.3872 | 8.92 |
| 0.83 | 0.17 | -0.7696 | 17.72 | 0.05 | 0.95 | -0.0223 | 0.51 |
| 0.59 | 0.41 | -0.3872 | 8.91 | 0.07 | 0.93 | -0.0315 | 0.73 |
| 0.09 | 0.91 | -0.0410 | 0.94 | 0.34 | 0.66 | -0.1805 | 4.16 |

对这些数值估计时，必须懂得，随机的样本分布与指数分布多少有些出入。因为样本量很小($n=20$)．不能期望样本均值 $\bar{x}$ 和数学期望$\frac{1}{\lambda}=10$相吻合．

统计检验方法可以确定偏离的随机性．这时，我们把模拟得到的数进行分组并确定落入每组中的频数，如下表所列：

| 组距 | 组中位 | 频数 | 计算平均值 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $S_{t1}$ | $S_{t2}$ |
| 0—5 | 2.5 | 8 | 8 | 8 |
| 5—10 | 7.5 | 6 | 14 | $22=S_1$ |
| 10—15 | 12.5 | 3 | — | — |
| 15—20 | 17.5 | 2 | 3 | $4=S_2$ |
| 20—25 | 22.5 | 1 | 1 | 1 |

样本均值按加总法（见第四章§4)得，

$$\bar{x}=x_k+\frac{S_2-S_1}{n}d=12.5+\frac{4-22}{20}\times1=8,$$

即样本均值为8。

总体和样本均值之差的随机性可以用显著性水平检验。在统计可靠性为95%时，抽样误差等于

$$d_\mu = uS\frac{\mu}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{10}{\sqrt{20}} = 4.38.$$

在计算抽样误差时，必须注意两点：

在总体为指数分布时，总体均值和标准差应与样本均值和方差吻合。因为总体均值$\mu$是给出的，所以标准差$\sigma$也是知道的。(用$t$-分布求)。

根据显著性水平：

$$|\mu - \bar{x}| < d_\mu,$$

即样本均值$\bar{x}$与总体均值的差具有随机的特性。

指数分布偏离的随机性与用模拟法得到的统计分布可以用皮尔逊$x^2$检验。因为总体均值是已知的，因此没有必要给出$\bar{x}$和$\mu$相等的条件。计算$x^2$的方法(见第五章§2)计算结果列于下表：

| $n_i$ | $n_i'$ | $n_i - n_i'$ | $(n_i - n_i')^2$ | $\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 8.57 | -0.57 | 0.3249 | 0.0379 |
| 6 | 5.20 | 0.80 | 0.6400 | 0.1230 |
| 3, 2, 1 } 6 | 3.16, 1.92, 1.15 } 6.23 | -0.23 | 0.0529 | 0.0085 |
| 计 | | | | $X^2_{观} = 0.1694$ |

当$\alpha = 0.05, R = k - s = 3 - 1 = 2$时，查$x^2$表得$x^2_{临} = 5.991$。因为$x^2_{观} < x^2_{临}$。即它们间的误差是随机性的。

**例题8.6** 设随机变数 X，服从正态分布，它的 数学期望$m_x$，均方差$\sigma_x$，随机变数的分布密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

试模拟$X$的值。

**解** 根据模拟的一般法则，作出分布函数$F(x)$ 和求它的反函数$F^{-1}$；然后，把随机数$R$变换成0到1．但实际模拟时，可以这样进行．把随机变数$X$变换成标准型：

$$z=\frac{X-m_x}{\sigma_x}$$

先模拟$z$值，再求$X$值．这样，$z$的数学期望$m_z=0$，均方差 $\sigma_z=1$。

实际上，标准数$z$的分布密度为

$$f_H(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

标准分布函数为

$$F_H(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0.5+\phi(z).$$

式中 $\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$

函数$F_H(z)$的图形如图(8.3)所示．图中箭头表示得到的随机变数$X$，其概率密度为$f_H(z)$。其分析式为：

$$R=0.5+\phi(z)$$
$$z=\phi^{-1}(R-0.5)$$

式中，$\phi^{-1}$—拉普拉斯反函数。

模拟标准随机变数$z$后，按下式求$X$。

$$X=\sigma_x z+m_x$$

因此，服从正态分布的随机变数$X$值的模拟可按下式进行

$$X=\sigma_x\phi^{-1}(R-0.5)+m_x.$$

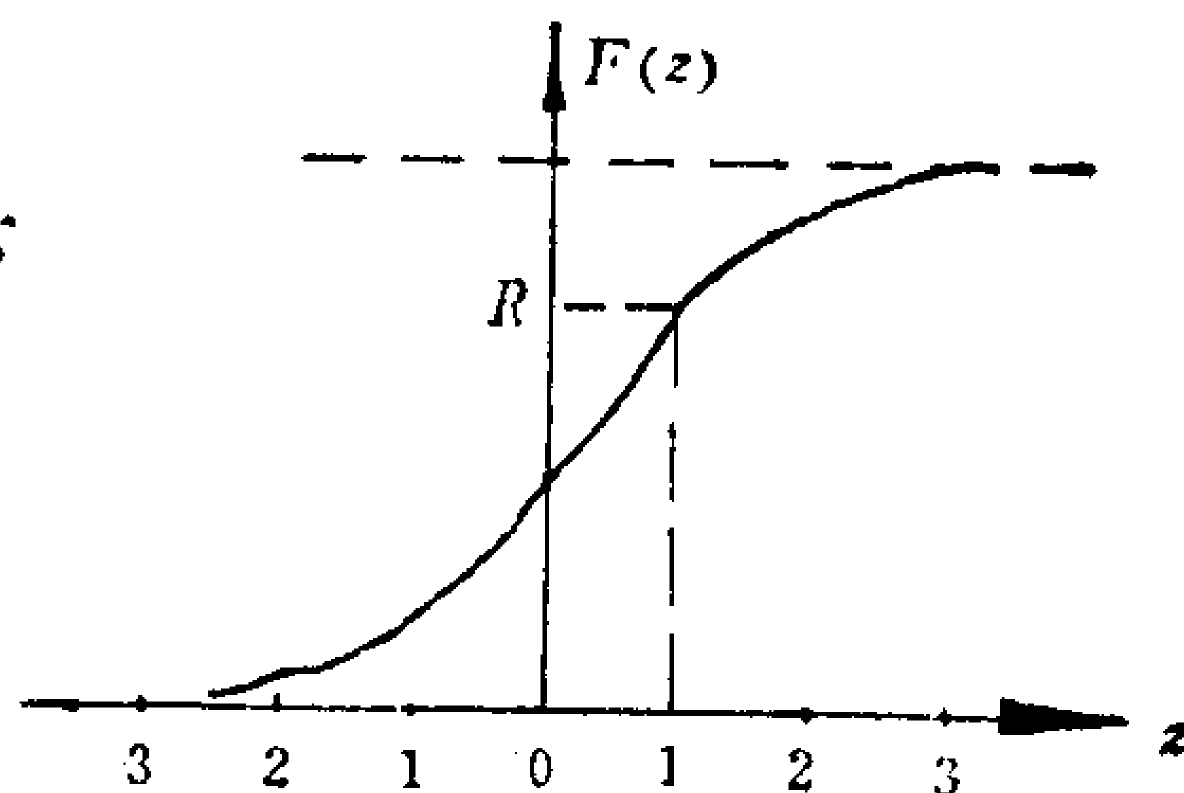



图8.3

如果模拟在计算机上实现，则以中心极限定理为根据．当综合足够多的独立的随机变数时，比较它们的方差，将是服从正态分布的随机变数．综合的随机变数越多，越接近于正态分布．经验表明，只须模拟六次就可获得实际正态分布足够的精度．因此，模拟正态分布的方法为：综合六个0到1的随机数，使其和标准化，即先求标准数$z$，后求随机数$X$。我们作相应的变换，令

$$V = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6.$$

式中，$R_1,\cdots,R_6$——六个独立的在0到1之间的随机数.我们求$V$的数学期望，方差和均方差。

$$M(V) = m_v = m_{r_1} + m_{r_2} + \cdots + m_{r_6}.$$

式中，$m_{r_1}$，$m_{r_2},\cdots,m_{r_6}$——相应为$R_1,R_2,\cdots,R_6$的数学期望。不过，它们都等于0.5。从而，

$$m_v = 6 \times 0.5 = 3.$$

按方差和的定义，我们求随机变数$v$的方差

$$D_v = D_{r_1} + D_{r_2} + \cdots + D_{r_6}.$$

式中　$D_{r_1}$，$D_{r_2},\cdots,D_{r_6}$——分别为$R_1,R_2,\cdots,R_6$的方差。

大家知道，随机变数$R$的方差在$(\alpha,\beta)$区域内，有固定的密度

$$D_r = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

在我们的条件下，$\alpha=0,\beta=1$；所以

$$D_r = \frac{1}{12}$$

因而　$$D_v = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2},$$

所以其均方差

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

使$V$值标准化，即

$$z = \frac{V - m_v}{\sigma_v} = (V - 3)\sqrt{2}.$$

再由$z$求$X$，即

$$X = \sigma_x z + m_x.$$

$$\because \quad V = \sum_{i=1}^{6} R_i,$$

$$\therefore \quad X = \sigma_x \sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{6} R_i - 3\right) + m_x.$$

**例题8.7** 模拟服从正态分布的随机变数X的四个可 能值．其参数为，$m_x = 0, \sigma_x = 1$和$m_x = 2, \sigma_x = 3$。

**解** 按公式 $X = \sigma_x \sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^{6} R_i - 3\right) + m_x$ 进行模拟．自随机数表中任取六个数，如：0.37，0.54，0.20，0.48，0.05，0.64。

$$R = \sum_{i=1}^{6} R_i = 0.37 + 0.54 + 0.20 + 0.48 + 0.05 + 0.64 = 2.28,$$

$$\therefore \quad x_1 = (2.28 - 3)\sqrt{2} + 0 = -1.008.$$

再在随机数表中任取六个数，加总，并按公式求$x_2$。依此类推，求$x_3$和$x_4$。

为了求$z$的可能值，可用公式

$$z = \sigma_x x_i + m_x.$$

$$\because \quad m_x = 2,\ \sigma_x = 3,\quad x_i = x_1 = -1.008,$$

$$\therefore \quad z_1 = 3(-1.008) + 2 = -2.824$$

同理可求$z_2, z_3$和$z_4$。

## §4 排队服务系统的模拟举例

**例题8.8** 某服务系统有三个服务员，输入流为泊松流，服务时间为指数分布 $f(\tau)=5e^{-5\tau}$。每个顾客服务时间等于0.5分钟。求在$T=4$分钟内被服务顾客的数学期望。

**解** 设 $T_1=0$时，第一个顾客到达，顾客由第一号服务员服务。第一个顾客服务完毕的时刻为 $T_1+0.5=0+0.5=0.5$。

下一个顾客到达的时刻按下式计算：

$$T_i=T_{i-1}+\tau_i.$$

式中$\tau_i$—第$i-1$，$i$个顾客间的间隔时间。

$\tau_i$的可能值按下式模拟

$$\tau_i=-\frac{1}{\lambda}\ln R=\frac{1}{\lambda}(-\ln R).$$

根据题意$\lambda=5$，$\therefore \tau_i=0.2(-\ln R_i)$。

随机数$R_i$取自随机数表(附录4)。例如，取 $R_1=0.10$，则 $\tau_2=0.2(-\ln 0.10)=0.2\times 2.3=0.46$。第一个顾客到达时间$T_1=0$，第二个顾客到达的时间为$T_2=T_1+0.46=0+0.46=0.46$。这时，第一号服务员正在为第一个到达的顾客服务。因此，第二个到达的顾客由第二号服务员服务。第二个顾客服务完毕的时刻为 $T_2+0.5=0.46+0.5=0.96$。

按随机数表的顺序再取一个随机数$R_2=0.09$，模拟第二和第三个到达顾客间的间隔。

$$\tau_3=0.2(-\ln 0.09)=0.2\times 2.41=0.482.$$

因为第二个顾客到达的时间为$T_2=0.46$。因此，第三个顾客到达的时刻为$T_3=T_2+0.482=0.46+0.482=0.942$。这时，第一个到达的顾客已经被服务完毕，所以第三个到达的顾客由第

一号服务员服务。第三个顾客被服务完毕的时刻为 $T_3=0.942+0.5=1.442$。依此类推，计算全过程列于表（8.1）。如果顾客到达时，所有服务员都不空，则该顾客立即离去。由表中可见，当第20个顾客被服务完毕时，$T_{20}=4.148>4$分钟。所以，第20个顾客也得不到服务而离去。这对服务系统说。是个损失。如果 $T>4$分钟，停止模拟。由表(8.1)可见，在4分钟内，有20个顾客到达，但被服务的只有12个，即$x_1=12$。如此类推，进行五次试验，可得：$x_2=15$，$x_3=14$，$x_4=12$，$x_5=13$，$x_6=15$。因而，六次模拟结果，被服务顾客的平均数为 $\bar{x}=(2\times12+1\times13+1\times14+2\times15)\div6=13.5$。即在 4 分钟 内 平均服务 13.5个顾客。

**例题8.9** 某损失制服务系统，配备一个服务员。顾客到达间隔为指数分布，即$f(\tau)=0.8e^{-0.8\tau}$。服务时间按$f_1(t)=1.5e^{-1.5t}$分布。试求半小时内，被服务顾客的平均数，顾客平均服务时间，被服务的概率，损失概率。

**解** $\because f(\tau)=0.8e^{-0.8\tau}$ $\therefore \tau_i$按下式模拟：

$$\tau_i=-\frac{1}{0.8}\ln R_i=1.25(-\ln R_i).$$

随机数$R_i$取自随机数表。

服务时间按$f_1(t)=1.5e^{-1.5t}$，所以$t_i$按下式模拟。

$$t_i=-\frac{1}{1.5}\ln r_i=0.67(-\ln r_i).$$

随机数$r_i$取自随机数表。

设$T_1=0$——第一个顾客到达时刻.如果随机数$r_1=0.10$，则为第一个顾客的服务时间

$$t_1=0.67(-\ln 0.10)=0.67\times2.30=1.54(\text{分钟}).$$

第一个顾客服务终了时刻 $T_1=1.54$分。

表8—1

| 顾客顺号 | 随机数 $R_i$ | $-l_n R_i$ | 顾客到达间隔 $t_i=0.2(l_n R_i)$ | 顾客到达时刻 $T_i=T_{i-1}+\tau_i$ | 服务完毕时刻$T_i+0.5$ 1号 | 2号 | 3号 | 计数（顾客）被服务 | 没有服务 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 0 | 0.500 | | | 1 | |
| 2 | 0.10 | 2.30 | 0.460 | 0.460 | | 0.960 | | 1 | |
| 3 | 0.09 | 2.41 | 0.482 | 0.942 | 1.442 | | | 1 | |
| 4 | 0.73 | 0.32 | 0.064 | 1.006 | | 1.506 | | 1 | |
| 5 | 0.25 | 1.39 | 0.278 | 1.284 | | | 1.784 | 1 | |
| 6 | 0.33 | 1.11 | 0.222 | 1.506 | 2.006 | | | 1 | |
| 7 | 0.76 | 0.27 | 0.054 | 1.560 | | 2.060 | | | 1 |
| 8 | 0.52 | 0.65 | 0.130 | 1.690 | | | | 1 | |
| 9 | 0.01 | 4.60 | 0.920 | 2.610 | 3.110 | | | 1 | |
| 10 | 0.35 | 1.05 | 0.210 | 2.820 | | 3.320 | | 1 | |
| 11 | 0.86 | 0.15 | 0.030 | 2.850 | | | 3.350 | 1 | |
| 12 | 0.34 | 1.08 | 0.216 | 3.066 | | | | | 1 |
| 13 | 0.67 | 0.40 | 0.080 | 3.146 | 3.646 | | | 1 | |
| 14 | 0.35 | 1.05 | 0.210 | 3.356 | | 3.856 | | 1 | |
| 15 | 0.48 | 0.73 | 0.146 | 3.502 | | | | | 1 |
| 16 | 0.76 | 0.27 | 0.054 | 3.556 | | | 4.002 | | 1 |
| 17 | 0.80 | 0.22 | 0.044 | 3.600 | | | | | 1 |
| 18 | 0.95 | 0.05 | 0.010 | 3.610 | | | | | 1 |
| 19 | 0.90 | 0.10 | 0.020 | 3.630 | | | | | 1 |
| 20 | 0.91 | 0.09 | 0.018 | 3.648 | 4.148 | | | | 1 |
| 21 | 0.17 | 1.77 | 0.354 | 4.002 停 | | | | $x_1=$ 12 | 8 |

再取随机数$r_2=0.69$，则第一个顾客和第二个顾客到达间隔时间，即

$$\tau_2=1.25(-\ln 0.69)=1.25\times 0.37=0.46.$$

第一个顾客到达时刻$T_1=0$，第二个顾客到达的时刻$T_2=T_1+0.46=0+0.46=0.46$。

这时，服务员正在为第一个顾客服务$(0.46<1.54)$，因此，

第二个顾客因得不到服务而离去。

按随机数表中的顺序取$R_3=0.07$,模拟第二和第三个顾客间的到达间隔。

$$\tau_3=1.25(-\ln 0.07)=1.25\times 2.66=3.32。$$

第二个顾客在$T_2=0.46$分钟到达，所以，第三个顾客到达

表8—2

| 顾客到达顺号 | 随机数 $R_i$ | $-l_nR_i$ | 服务时间 $\tau_i=1.25(-\ln R_i)$ | 顾客到达间隔 $T_i=T_{i-1}+\tau_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 0 |
| 2 | 0.69 | 0.37 | 0.46 | 0.46 |
| 3 | 0.07 | 2.66 | 3.32 | 3.78 |
| 4 | 0.49 | 0.71 | 0.89 | 4.67 |
| 5 | 0.41 | 0.89 | 1.11 | 5.78 |
| 6 | 0.38 | 0.97 | 1.21 | 6.99 |
| 7 | 0.87 | 0.14 | 0.18 | 7.17 |
| 8 | 0.63 | 0.46 | 0.58 | 7.75 |
| 9 | 0.79 | 0.24 | 0.30 | 8.05 |
| 10 | 0.19 | 1.66 | 2.08 | 10.13 |
| 11 | 0.76 | 0.27 | 0.34 | 10.47 |
| 12 | 0.35 | 1.05 | 1.31 | 11.78 |
| 13 | 0.58 | 0.54 | 0.68 | 12.46 |
| 14 | 0.40 | 0.92 | 1.15 | 13.61 |
| 15 | 0.44 | 0.82 | 1.02 | 14.63 |
| 16 | 0.01 | 4.60 | 5.75 | 20.38 |
| 17 | 0.10 | 2.30 | 2.88 | 23.26 |
| 18 | 0.51 | 0.67 | 0.84 | 24.10 |
| 19 | 0.82 | 0.20 | 0.25 | 24.35 |
| 20 | 0.16 | 1.83 | 2.29 | 26.64 |
| 21 | 0.15 | 1.90 | 2.38 | 29.02 |
| 22 | 0.48 | 0.73 | 0.91 | 29.93 |
| 23 | 0.32 | 1.14 | 1.42 | 31.35 |
| | | | | 停 |

的时刻为$T_3=T_2+\tau_3=0.46+3.32=3.78$。这时，服务员已经闲着，(3.78>1.54)因此，服务员可以给第三个顾客服务。

再往后的计算过程，列于表(8.2)和(8.3)。当模拟时间$T_i\geqslant30$分时，模拟停止。例如，在表(8.3)上，当第23个顾客到达时，$T_{23}=31.35>30$。根据表(8.4)可以求得30分钟内被服务的

**表8—3**

| 顾客到达顺号 | 随机数 $r_i$ | $-l_n r_i$ | 服务时间 $t_i=0.67(-\ln r_i)$ | 时间 顾客到达 | 开始服务 | 服务终了 | 计数 被服务的顾客数 | 没有被服务的顾客数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.10 | 2.30 | 1.54 | 0 | 0 | 1.54 | 1 | |
| 2 | / | / | / | 0.46 | | | | 1 |
| 3 | 0.09 | 2.41 | 1.61 | 3.78 | 3.78 | 5.39 | 1 | |
| 4 | / | / | / | 4.67 | | | | 1 |
| 5 | 0.73 | 0.32 | 0.21 | 5.78 | 5.78 | 5.99 | 1 | |
| 6 | 0.25 | 1.39 | 0.93 | 6.99 | 6.99 | 7.92 | 1 | |
| 7 | / | / | / | 7.17 | | | | 1 |
| 8 | / | / | / | 7.75 | | | | 1 |
| 9 | 0.33 | 1.11 | 0.74 | 8.05 | 8.05 | 8.79 | 1 | |
| 10 | 0.76 | 0.27 | 0.18 | 10.13 | 10.13 | 10.31 | 1 | |
| 11 | 0.52 | 0.65 | 0.44 | 10.47 | 10.47 | 10.91 | 1 | |
| 12 | 0.01 | 4.60 | 3.08 | 11.78 | 11.78 | 14.86 | 1 | |
| 13 | / | / | / | 12.46 | | | | 1 |
| 14 | / | / | / | 13.61 | | | | 1 |
| 15 | / | / | / | 14.63 | | | | 1 |
| 16 | 0.35 | 1.05 | 0.70 | 20.38 | 20.38 | 21.08 | 1 | |
| 17 | 0.86 | 0.15 | 0.10 | 23.36 | 23.26 | 23.36 | 1 | |
| 18 | 0.34 | 1.08 | 0.72 | 24.10 | 24.10 | 24.82 | 1 | |
| 19 | / | / | / | 24.35 | | | | 1 |
| 20 | 0.67 | 0.40 | 0.27 | 26.64 | 26.64 | 29.91 | 1 | |
| 21 | 0.35 | 1.05 | 0.70 | 29.02 | 29.02 | 29.72 | 1 | |
| 22 | 0.48 | 0.73 | 0.49 | 29.93 | | | | 1 |
| | | | | | | | 计13 | 9 |

顾客的平均数为$\overline{N}=\frac{93}{6}=15.5$。平均服务时间$\bar{t}_{服}=\frac{4.49}{6}=0.748$；被服务的概率$P_{服}=\frac{3.974}{6}=0.662$。损失的概率$P_{损}=1-P_{服}=1-0.662=0.338$。

因此，有66%的顾客得到服务，34%的顾客没有被服务。

表8—4

| 试验编号 | 到达的顾客数 $Nj_{到}$ | 被服务的顾客数 $Nj_{服}$ | 服务时间 $tj_{服}$ | 平均服务时间 $\bar{t}_{j服}=\frac{t_{j服}}{N_{j服}}$ | 被服务的顾客的概率 $P_{j服}=\frac{N_{j服}}{N_{j到}}$ | 损失概率 $P_{j损}=1-P_{j服}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22 | 13 | 11.73 | 0.90 | 0.591 | 0.409 |
| 2 | 25 | 17 | 8.80 | 0.52 | 0.680 | 0.320 |
| 3 | 24 | 16 | 13.46 | 0.84 | 0.667 | 0.333 |
| 4 | 22 | 15 | 12.19 | 0.81 | 0.682 | 0.318 |
| 5 | 20 | 13 | 11.99 | 0.92 | 0.650 | 0.350 |
| 6 | 27 | 19 | 9.57 | 0.50 | 0.704 | 0.296 |
| Σ | 140 | 93 | | 4.49 | 3.974 | |

**例题8.10** 简单系统可靠性的估计。设系统由顺次连接的两个元件组成。两个元件中，任何一个元件发生故障，系统就停止运转。第一个元件有两个组成部分$A$，$B$(它们平行联接)如果$A$、$B$同时发生故障则第一个元件发生故障。第二个元件由一个部件$c$组成。当$c$发生故障时，第二个元件发生故障。试用蒙特-卡罗法求：$a$）估计系统工作的概率$p^*$。已知组成部件工作的概率：$p(A)=0.8$，$p(B)=0.85$，$p(C)=0.6$；$b$）绝对误差$|p-p^*|$。这里$p$是系统的可靠性。它用分析计算获得。进行50次试验。

**解** $a$）在随机数表中任取三个随机数：0.10，0.09，和0.73；按规则：（1）如果随机数小于事件的概率，则事件发生；如果随机数大于或等于事件的概率，则事件不发生。模拟事件

$A$, $B$, $C$, 处于工作状态。模拟结果列于下表。

| 试验次数 | 组成部件 | 模拟部件的随机数 | | | 参加系数工作的单元 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $C$ | 元件 | 系统 |
| 1 | 第一个元件 | 0.10 | 0.09 | | + | + | | + | |
| | 第二个元件 | | | 0.73 | | | - | - | - |
| 2 | 第一个元件 | 0.25 | 0.33 | | + | + | | + | |
| | 第二个元件 | | | 0.76 | | | - | - | - |
| 3 | 第一个元件 | 0.52 | 0.01 | | + | + | | + | |
| | 第二个元件 | | | 0.35 | | | + | + | + |
| 4 | 第一个元件 | 0.86 | 0.34 | | - | + | | + | |
| | 第二个元件 | | | 0.67 | | | - | - | - |

∵ $p(A)=0.8$ 且 $0.10<0.8$，则事件$A$发生，即部件$A$在这次试验中没有发生故障。因为 $p(B)=0.85$，且$0.09<0.85$，所以，事件$B$发生，即部件$B$没有发生故障。

因此，第一个元件中的两个部件都没有发生故障，即第一个元件工作正常。在上表中相应的部分画成“+”号。

因为$p(C)=0.6$，且$0.73>0.6$，所以事件$C$没有发生。即部件$C$发生故障。换句话说，第二个元件，亦就是系统发生故障，停止工作。在上表的相应的格中画成“-”号。

在上表中进行四次模拟，我们进行50次试验后，得到28次系统处于正常工作，作为已知可靠性$p$的估计值$p^*=\dfrac{28}{50}=0.56$。

$b$) 求$p$。第一个和第二个元件正常工作的概率相应为：

$$p_1=1-p(\bar{A})\cdot p(\bar{B})=1-0.2\times0.15=0.97,$$

$$p_2=p(c)=0.6$$

∴系统正常工作的概率 $p=p_1\times p_2=0.97\times0.6=0.582$。所求绝对误差$|p-p^*|=0.582-0.56=0.022$。

**例题8.11** 设排队服务系统内，配备两个服务员. 供顾客排队的位置$m=3$. 当顾客到达时，三个位置都不空，顾客立即离去，另求服务。顾客流用相邻顾客到达间隔时间表示. 它们是独立的随机变数，并服从同样的非指数分布$f(t)$. 每个顾客的服务时间也是随机变数. 它们都服从非指数分布 $\varphi(t)$. 且$\varphi(t)$ 与 $f(t)$的误差对所有顾客都相等. 试用蒙特-卡罗法模拟排队服务系统. 我们只进行一个实现. 系统极限状态($t\to\infty$)时的近似的运行指标：

a) 占用服务员的平均数；

b) 顾客平均排队等待时间；排队等待时间的方差；

c) 损失的概率.

建立模拟图和模拟结果的作业图.

**解** 系统状态转移图为

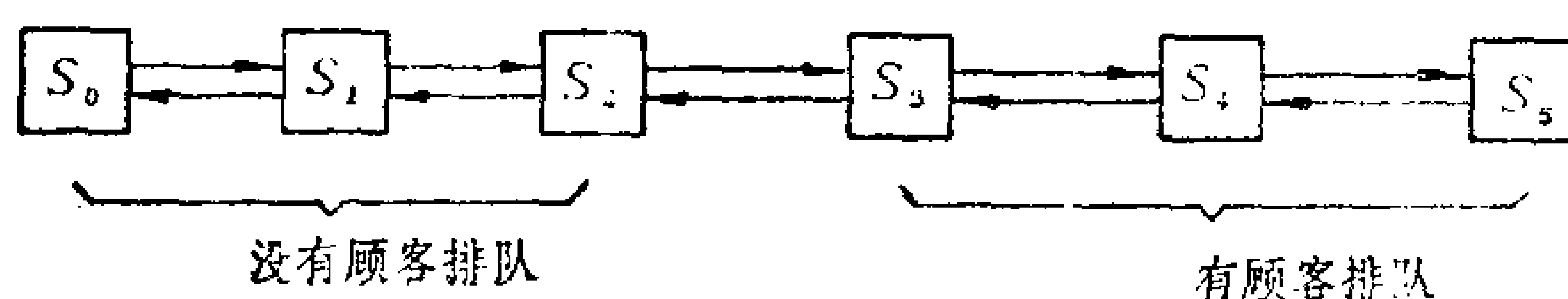



图8.4

图中状态数是有限的，且由一个状态可以转移到其它任何状态. 系统虽然不是泊松分布，但它是平稳的. 因而系统可按一次可能实现模拟. 为了简单起见，设初始时刻$t=0$，系统处于状态$S_0$. 顾客流在时间轴$ot$上. 即随机点的系列$t_1, t_2$，……一相应为第一，第二，…，顾客到达的时刻(见图8.6). 顾客流的模拟按如下方式进行。建立顾客到达间隔时间$T$的分布函数.

$$F(t)=\int_0^t f(t)dt. \qquad (\quad)$$

并模拟随机变数值 $T_1=F^{-1}(R)$令时间轴上 $T_1=ot_1$，表示第一个顾客的到达时刻. 在随机数表中取不同的$R$值，得到$T_2=$

$t_1t_2$，$T_3=t_2t_3$，…（见图8.5）。这样进行几百次模拟。模拟过程如图(8.6)。

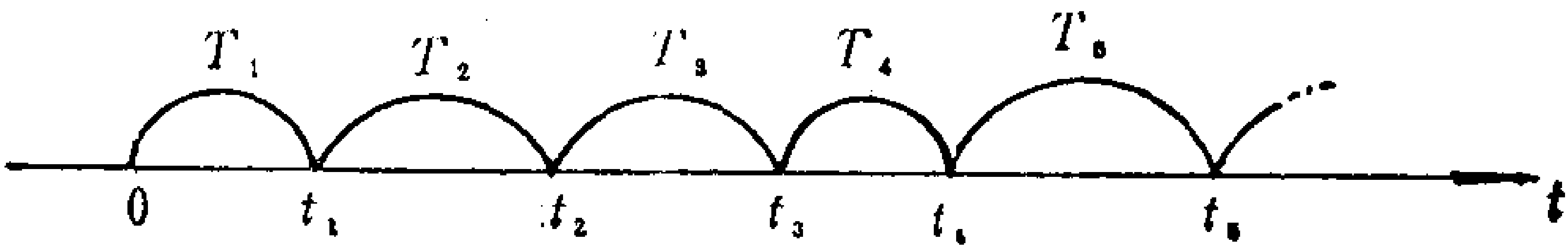


图8.5

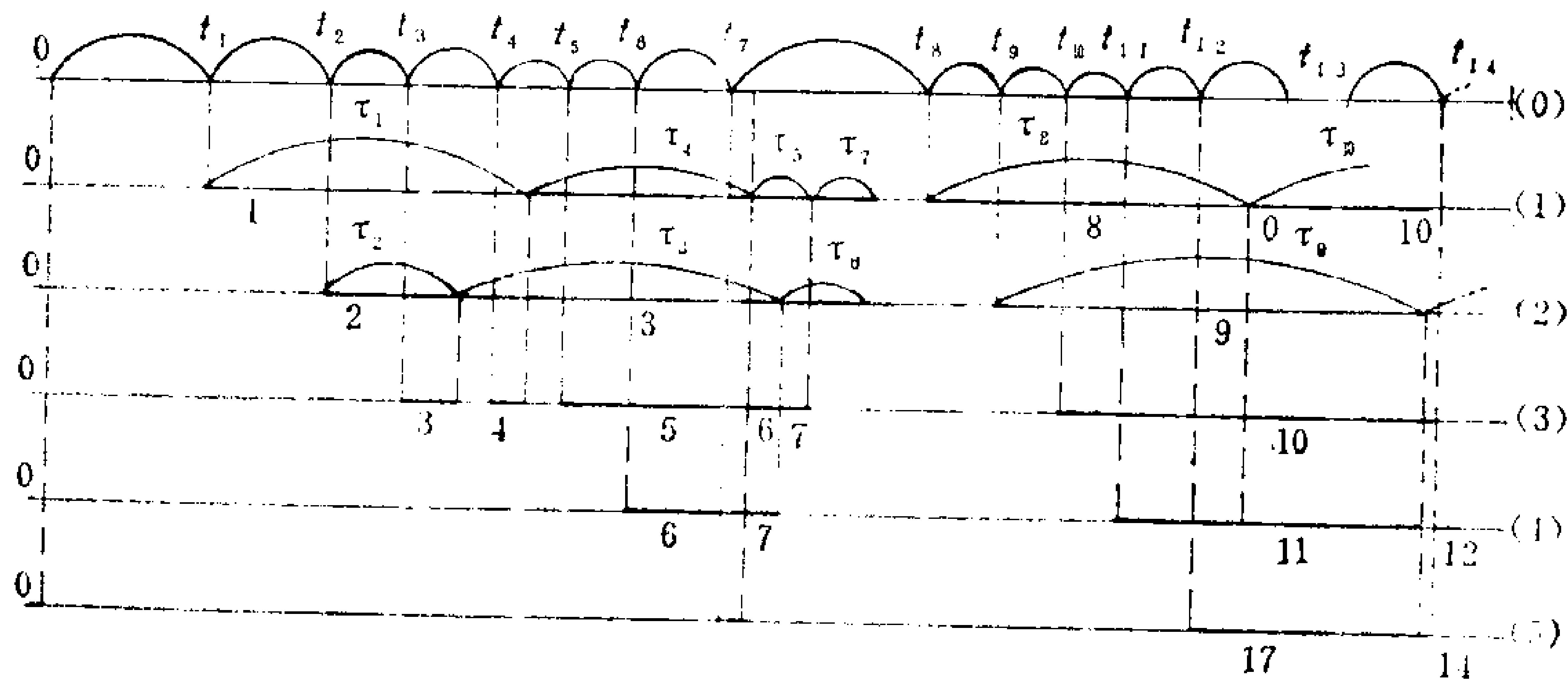


图8.6

在时间轴(o)上，我们标出顾客到达时刻。在它的下面，我们画出五个时间轴：(1)，(2)，(3)，(4)，(5)。在轴(1)和(2)上，表示两个服务员的状况(粗线部分表示服务员"忙着"，细线表示"空着")。在轴(3)，(4)，(5)上，表示三个排队位置的状况(粗线表示"占着"，细线表示为"空着")。五条轴和(o)轴的计算的单位时间相同。

在$t_1$之前，即第一个顾客到达之前，所有服务员和所有排队位置都空着。在$t_1$时刻，第一个顾客到达。1号服务员为他服务。服务时间用模拟确定。这时，我们取随机数$R$，因为

$$R=\phi(t)=\int_0^t\varphi(t)dt.$$

∴ $$t=\phi^{-1}(R).$$

式中　$\phi$—服务时间的分布函数。

第一个顾客的服务时间模拟值用$\tau_1$表示，并把它自$t_1$开始，用粗线标在轴(1)上，（见图8.6）.在$t_2$时刻第二个顾客到达，第一号服务员正在为第一个顾客服务。第二个顾客便请2号服务员服务。再模拟一个$\tau$，用$\tau_2$表示，用粗线自$t_2$开始画起（见图8.6轴(2)）。

在$t_3$时刻两个服务员都不空，到达的顾客只好排队，等待服务，即占用第一号位置（见轴(3)）。一直等到服务员有空出来为它服务。在我们的例子中2号服务员比1号服务员较早空出来。这时，轴(3)上停止画粗线，而把它转到轴(2)上，再模拟服务时间$\tau_3$。在轴(2)上画新的粗线，而在轴(3)上画细线（排队位置空着）。

我们不再重复叙述。因为这已经清楚地表示在图(8.6)上了。在图上，在区间（占用服务员和位置）的对面，标出顾客的编号。当然，这样的模拟应有足够长的时间$T$。

现在我们根据这个现实求系统的效率指标：概率$p_0$，$p_1$，$\tilde{p}_2$将是占用0,1,2号服务员的概率。这里用$\tilde{p}_2$表示$\tilde{p}_2 = p_2 + p_3 + p_4 + p_5$，它不等于$p_2$。把时间轴$ot$分成，所有服务员都空着的时间$T_0$有一个服务员忙着的时间$T_1$和两个服务员忙着的时间$T_2$。足够长的时间$T$包括着：

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

在$T$很长时，$p_0$，$p_1$，$\tilde{p}_2$近似等于：

$$p_0 \approx \frac{T_0}{T};\quad p_1 \approx \frac{T_1}{T};\quad p_2 \approx \frac{T_2}{T}.$$

应该注意，由于初始条件的影响，$T$的起始点不能从$t_0$算起。而应从没有初始条件的影响的$0'$开始。

求有0，1，2，3个顾客排队的概率$\hat{p}_0$，$\hat{p}_1$，$\hat{p}_2\hat{p}_3$。再把很

长的时间$T$分成$\hat{0}$，$\hat{1}$，$\hat{2}$，$\hat{3}$，相应为有0，1，2，3个顾客排队时间．这样：

$$p_0 \approx \frac{\hat{T}_0}{T};\ p_1 \approx \frac{\hat{T}_1}{T};\ p_2 \approx \frac{\hat{T}_2}{T};\ p_3 \approx \frac{\hat{T}_3}{T}.$$

占用服务员的平均数用一般的方法即可求得：

$$\bar{K} = 1 \times p_1 + 2\widetilde{p}_2 = p_1 + 2\widetilde{p}_2.$$

顾客平均待解时间，按如下方法确定：

设在很长的时间$T$内，在$t_K$，$t_{K+1},\cdots,t_{K+i},\cdots,t_{K+N}$，时刻为顾客到达时刻．如果第$K+i$个顾客到达时立即得到服务（或立即离去），则它的等待时间，$t_{待}^{K+i}=0$，如果该顾客参加排队，则它的等待时间在轴(3)，(4)和(5)上．顾客平均排队时间近似地等于这些时间的算术平均值．

$$\bar{t}_{待} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} t_{待}^{k+i}.$$

等待时间的方差，可用同样的方法求：

$$D(T_{待}) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(t_{待}^{k+i})^2 - \bar{t}_{待}^{2}$$

最后求损失的概率

$$p_{损} \approx \frac{N^*}{N}.$$

式中　$N^*$—没有得到服务的顾客

$N$—在该段时间内到达的顾客的总数．

**例题8.12**　用统计试验法模拟爱尔朗流、爱尔朗服务时间多通道排队系统．

**解**　1.爱尔朗分布的模拟．其分布密度为

$$f(t) = \frac{(\lambda k)^k t^{k-1} e^{-\lambda k t}}{(k-1)!}.$$

分布函数

$$F(t)=\int_0^t \frac{(\lambda k)^k t^{k-1} e^{-\lambda k t}}{(k-1)!} dt;$$

$k$阶爱尔朗分布是由$k$个独立同指数分布的随机变数和的分布．其参数为$\lambda_{指}$．如果随机变数$t_i$为指数分布，这时

$$t_i=-\frac{1}{\lambda}\ln R。$$

相邻两个随机变数之和为

$$t_i=t_{2i-1}+t_{2i},$$

即二阶爱尔朗分布，其参数

$$\lambda_{爱}=\frac{1}{2}\lambda_{指}。$$

通常，$k$ 阶爱尔朗分布为$k$ 个独立的同指数分布的和的分布。即

$$t_i=-\frac{1}{\lambda_{指}}k\ln(R_1,R_2,\cdots,R_k)。$$

式中　$R_1,R_2,\cdots,R_k$——在(0,1)间的均匀分布数值。

**2.**　系统内有$S$个服务员.顾客按到达先后次序给予服务。服务时间为$t_{服js}$。如果第 $i$ 个顾客到达的时刻为$T_i$。这时，所有服务员都不空，顾客开始排队。若顾客到达强度为$\lambda$,服务强度为$\mu$. 系统的负荷为$\rho=\frac{\lambda}{s\mu}$。若 $\rho<s\mu$, 则系统处于平稳状态。解题的框图如图8.4所示。现在，我们讨论计算程序。

第一个顾客到达系统的时间为$T_1$，第$S$个服务员空闲时间为$T_s$。开始，所有 $T_s$都等于0。计算终了时间——$T_{终}$。假设有$i$个顾客到达，$t_i$是第 $i$ 和第（$i-1$）个顾客的到达间隔。第$i$个顾客到达时刻为

$$T_i=T_{i-1}+t_i,\ T_0=0。$$

我们来检查一下服务员的服务情况。如果有空闲的服务员 $T_s \leqslant T_i$，顾客到达服务系统。这时，$T_s$用$T_i + t_{服js}$代替。第$i$个顾客等待时间为0，$w_i = 0$。如果有几个空闲的服务员，选取最早空闲 $T_{smin}$的服务员服务。如果所有服务员都不空。即$T_s > T_i$顾客排队等待服务。

第 $i$ 个顾客等待服务时间为

$$W_i = T_{smin} - T_i.$$

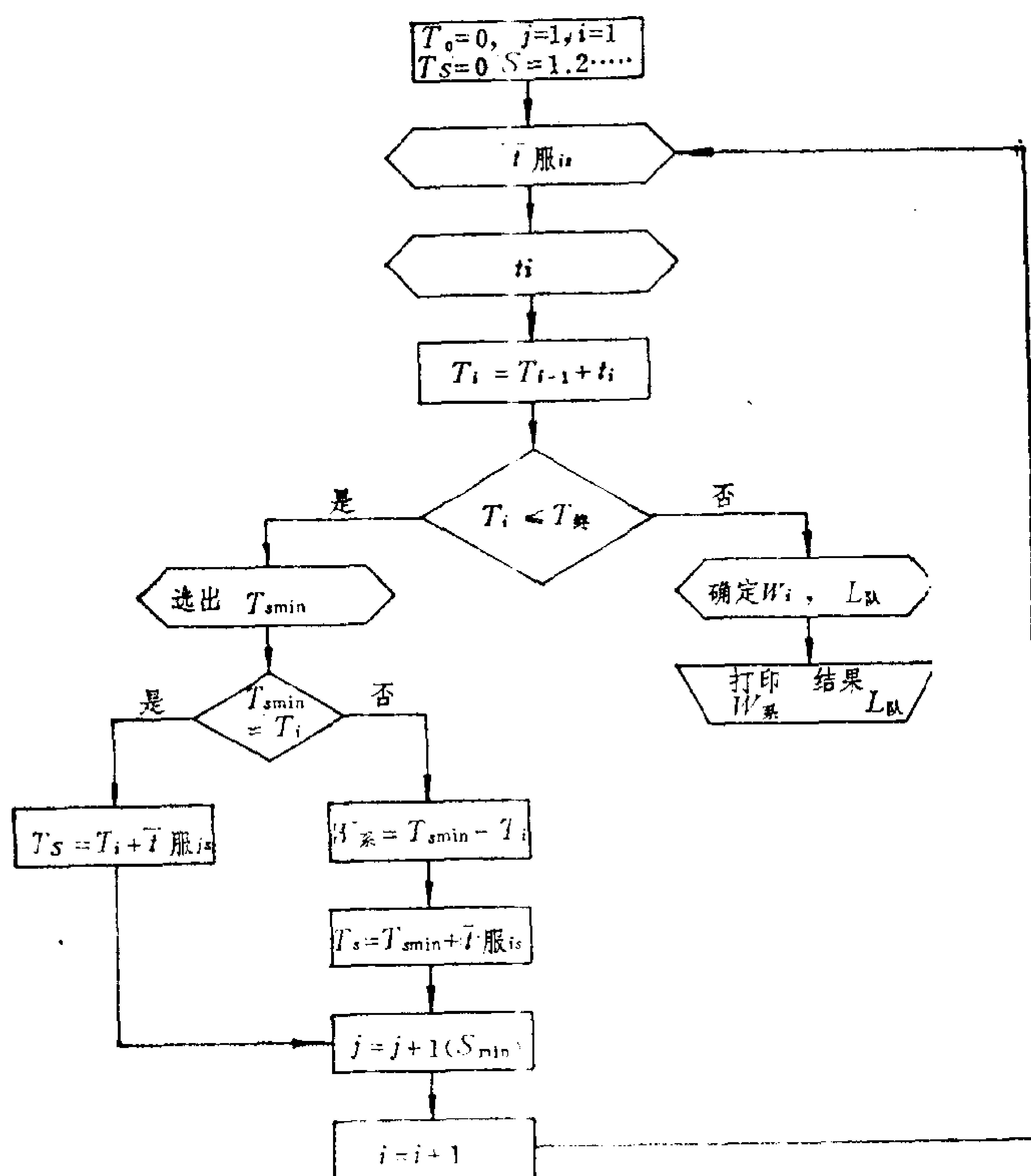



图8.7　多通道服务系统框图

服务员为第 $i$ 个顾客服务完毕时刻为

$$T_s = T_{smin} + t_{服js}.$$

这样，我们可以分析下一个顾客。试验完毕的条件为$T_i > T_{终}$。重复$N$次试验，得平均服务时间。

$$\overline{W} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i.$$

当 $s=2$、3、4；$\rho=0.3 \sim 0.9$时，按上述模型在电子计算机上模拟，其结果列于表(8.5)。我们还用一般的公式，$\mu\overline{W}_{队} = \frac{L_{队}}{s\rho}$进行计算，其结果也列于表(8.5)

泊松流、指数服务时间系统的 $\mu\overline{W}$ 值表　　　　表8.5

| $\rho$ | $S=2$ | | $S=3$ | | $S=4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mu\overline{W}$值按公式计算 | 在电子计算机上模拟 | 按公式计算 | 在电子计算机上模拟 | 按公式计算 | 在电子计算机上模拟 |
| 0.30 | 0.009 | 0.092 | 0.033 | 0.029 | 0.013 | 0.011 |
| 0.40 | 0.190 | 0.188 | 0.078 | 0.076 | 0.038 | 0.035 |
| 0.50 | 0.333 | 0.336 | 0.158 | 0.143 | 0.087 | 0.090 |
| 0.60 | 0.562 | 0.567 | 0.296 | 0.312 | 0.179 | 0.126 |
| 0.70 | 0.961 | 1.003 | 0.547 | 0.537 | 0.357 | 0.232 |
| 0.80 | 1.778 | 1.710 | 1.079 | 1.079 | 0.746 | 0.691 |
| 0.85 | 2.604 | 2.616 | 1.623 | 1.650 | 1.149 | 1.034 |
| 0.90 | 4.263 | 4.078 | 2.124 | 2.630 | 1.969 | 1.906 |

注　表中，$S$——服务员数目

由表(8.5) 中数据可见，在电子计算机上模拟的结果与按公式计算的结果，相差很小。因此，在模拟法可以在实际中应用。

# 第九章　排队模型的经验公式

随着电算技术的发展，以前不能用分析法求解的排队问题，现在可以用电子计算机模拟来获得经验公式。本章将分别讨论排队论的经济评价、排队模型的一些经验公式及表格法。

## §1　排队论的经济评价

在排队论中应用期望费用函数方程，能够实现运行指标好，结构合理的服务系统。

期望费用函数方程有两种表示方法：

(1) 服务成本和顾客服务费用；

(2) 顾客排队和设备闲置费用。

下面我们用例题分别说明：

**例题9·1**　设排队模型为$M|M|1$。费用函数为$E$，即单位时间内的服务成本与顾客在系统内逗留时间的费用之和：

$$E=\mu c_1+L_{系}c_2.$$

式中　$\mu$—服务强度

$c_1$—当$\mu=1$时，服务员服务单位时间的费用；

$c_2$—顾客在系统内逗留单位时间的费用。

$L_{系}$—系统内顾客的平均数

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

$$\therefore\qquad E=\mu c_1+\frac{\lambda}{\mu-\lambda}C_2.$$

为了求最小费用，对上式中的$\mu$进行微分，并使之等于零，即

$$\frac{dE}{d\mu}=c_1-c_2\lambda\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}=0.$$

解之得最优的 $\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$ （注意$\mu^*>\lambda$）。

**例题9.2** 如果上题中的$c_1$为一个顾客服务的费用，试问是否存在最优服务强度。

**解** 设单位时间内有$\lambda$个顾客请求服务。如果系统处于极限平稳状态，则在单位时间内应有$\lambda$个顾客被服务完了。这样，单位时间的服务费用为$c_1\mu$。服务系统的总费用为：

$$E=c_1\lambda+c_2\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (\because \lambda=\mu).$$

上式中的费用函数近似于$c_1\lambda$，所以不存在$\mu$的最优值$\mu^*$。

**例题9.3** 设汽车按最简单流来到自动加油站，平均每小时到达5辆，加油站每小时加油$\mu$辆汽车，加油时间服从指数分布。如果汽车停留一小时的费用为1元，加油费为$\mu c_1$元.若$c_1=2$元。求加油站合理能力$\mu^*$。

**解** $\mu^*=\lambda+\sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$. 今$\lambda=5$. $c_1=2$元，

$\because$ $c_2=1$元，$\therefore \mu^*=5+\sqrt{\frac{5}{2}}=6.58$.

即每小时接待三个顾客收入最多。

在选择服务系统合理参数时，经济费用包括顾客排队损失和设备闲置损失。期望费用方程为

$$E=[L_{队}c_1+(1-\rho)nc_2]T.$$

式中$E$—总费用，

$L_{队}$—排队顾客的平均数；

$(1-\rho)$—服务员空闲的概率；

$c_1$—顾客排队单位时间的费用；

$c_2$—服务员空闲单位时间的费用；

$n$—服务员数目；

$T$—计算费用的时间。

通常只需要计算服务一个顾客的费用，即

$$E_1 = \frac{E}{N}.$$

式中　$N$—在$T$时间内到达的顾客数。

如果顾客排队费用不大，则排队顾客很多。反之，增加服务设备，提高服务效率，减少顾客排队时间。为了确定排队服务系统的合理功能，采用求极值的方法．即

$$\frac{dE}{d\rho} = 0.$$

如果$\frac{d^2E}{d\rho^2} > 0$，则我们可得到合理的系统负荷，即它的总费用最少．

对$M|M|_1$型有

$$E_1 = c_1 L_{队} + (1-\rho)c_2.$$

$$\because \qquad L_{队} = \frac{\rho^2}{1-\rho},$$

$$\therefore \qquad E_1 = \frac{\rho^2}{1-\rho}c_1 + (1-\rho)c_2.$$

$$\frac{dE_1}{d\rho} = \frac{2\rho(1-\rho)+\rho^2}{(1-\rho)^2}c_1 + c_2 = 0;$$

$$\rho^2(c_1+c_2) - 2\rho(c_1+c_2) + c_2 = 0;$$

所以

$$\rho^* = 1 - \sqrt{1 - \frac{c_2}{c_1+c_2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{c_2}{c_1}} - 1}{\sqrt{1+\frac{c_2}{c_1}}}.$$

二次导数：$\frac{d^2E}{d\rho}=\frac{2c_1}{(1-\rho)^3}>0$.

所以最少费用为

$$E_{min}=2c_1\left(\sqrt{1+\frac{c_2}{c_1}}-1\right).$$

对$M/D/1$型有

$$\rho^*=\frac{\sqrt{1+2\frac{c_2}{c_1}}-1}{\sqrt{1+2\frac{c_2}{c_1}}}.$$

$$E_{min}=c_1\left(\sqrt{1+2\frac{c_2}{c_1}}-1\right).$$

在实际计算中，不仅需要知道$\rho^*$，而且需要知道它的范围.如果参数$\rho$有很大偏离，但费用的偏离不大，则表示服务系统有经济稳定性。我们用下式表示：

$$\frac{E_1}{E_{min}}=\frac{\frac{\rho^2}{1-\rho}+(1-\rho)\frac{c_2}{c_1}}{2\left(\sqrt{1+\frac{c_2}{c_1}}-1\right)}\quad(\text{对}M/M/1\text{型}).$$

当顾客流为最简单流，服务时间为定长分布时.

$$\frac{E_1}{E_{min}}=\frac{\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}+(1-\rho)\frac{c_2}{c_1}}{\sqrt{1+2\frac{c_2}{c_1}}-1}.$$

在铁路货物运输中，$\frac{c_2}{c_1}$值在很大范围内波动. 为了说明经济估计的方法。我们假定

$$\frac{c_2}{c_1}=3.$$

这时， $\frac{E_1}{E_{min}}=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}+\frac{3(-\rho)}{2}$，$\rho^*=0.50$ ($M/M/1$型)，

$$\frac{E_1}{E_{min}}=\frac{\rho^2}{3.30(1-\rho)}+1.82(1-\rho),\ \rho^*=0.62$$

($M/D/1$型)。

现把$\frac{E_1}{E_{min}}$与$\rho$之间的关系列于下表：

| $\rho$ | $E_1/E_{min}$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{C_2}{C_1}=3$ | | $\frac{C_2}{C_1}=8$ | |
| | 服务时间分布律 | | | |
| | 指数分布 | 定长分布 | 指数分布 | 定长分布 |
| 0.1 | 1.356 | 1.644 | 1.803 | 2.306 |
| 0.2 | 1.225 | 1.472 | 1.612 | 2.056 |
| 0.3 | 1.114 | 1.313 | 1.432 | 1.813 |
| 0.4 | 1.033 | 1.172 | 1.266 | 1.579 |
| 0.5 | 1.000 | 1.061 | 1.125 | 1.360 |
| 0.6 | 1.050 | 1.000 | 1.025 | 1.168 |
| 0.7 | 1.267 | 1.041 | 1.008 | 1.030 |
| 0.8 | 1.900 | 1.331 | 1.200 | 1.025 |
| 0.9 | 4.200 | 2.636 | 2.225 | 1.554 |

可以看到，$\rho^*$变动20%，指数分布的服务时间的费用便增加5%，定长分布的服务时间的费用增加10%。

如果$\frac{c_2}{c_1}=8$，

$$\frac{E_1}{E_{min}}=\frac{\rho^2}{4(1-\rho)}+2(1-\rho);\ \rho^*=0.67$$

(对$M/M/1$型)。

$$\frac{E_1}{E_{min}}=\frac{\rho^2}{6.24(1-\rho)}+2.56(1-\rho);\ \rho^*=0.76$$

(对$M/D/1$型)。

即 $\rho^*$变动20%，$M/M/1$型增加费用20%，$M/D/1$型增加费

用60%。

为了直观，我们把它画成图（9.1和图9.2）。

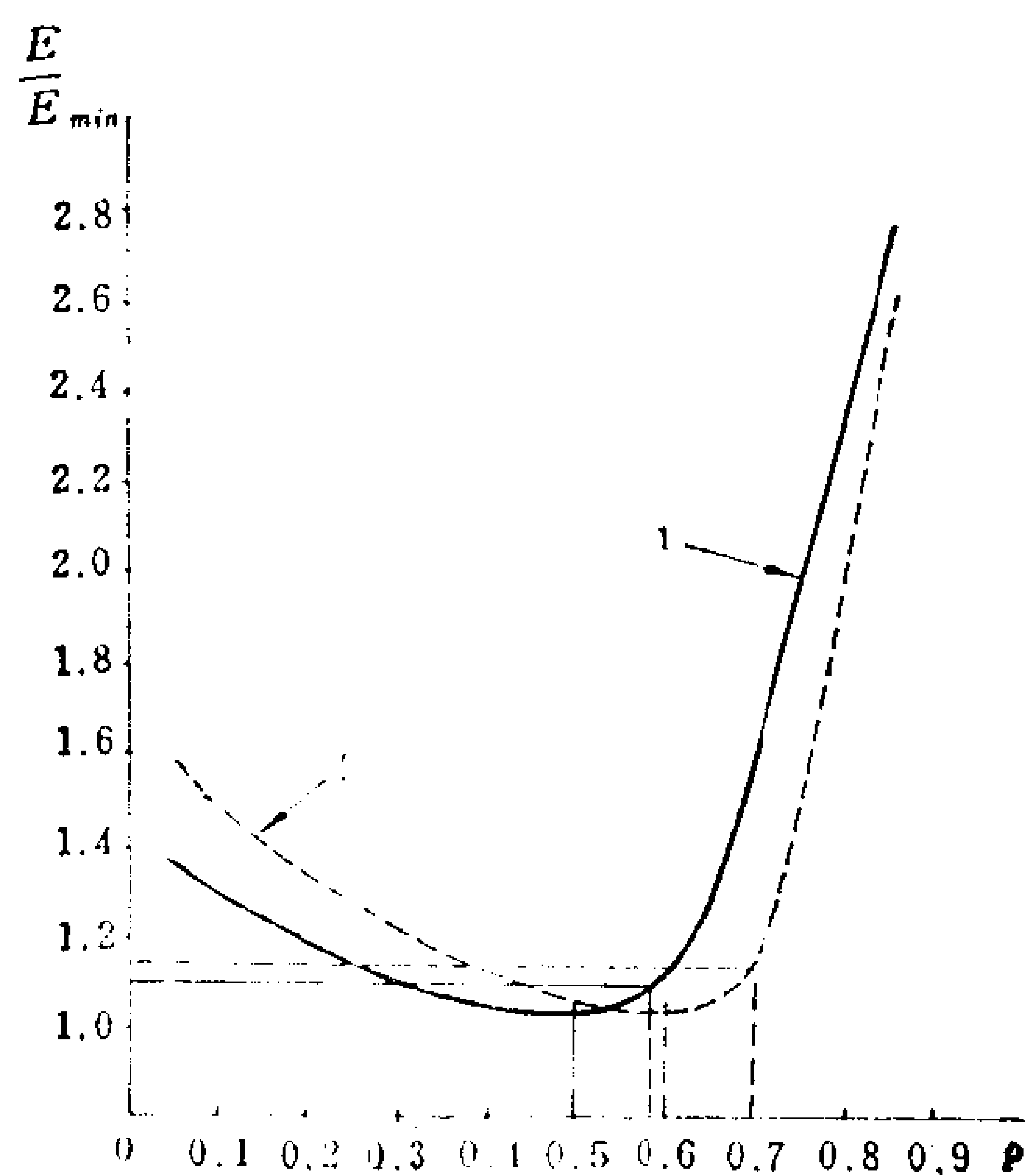



图9.1

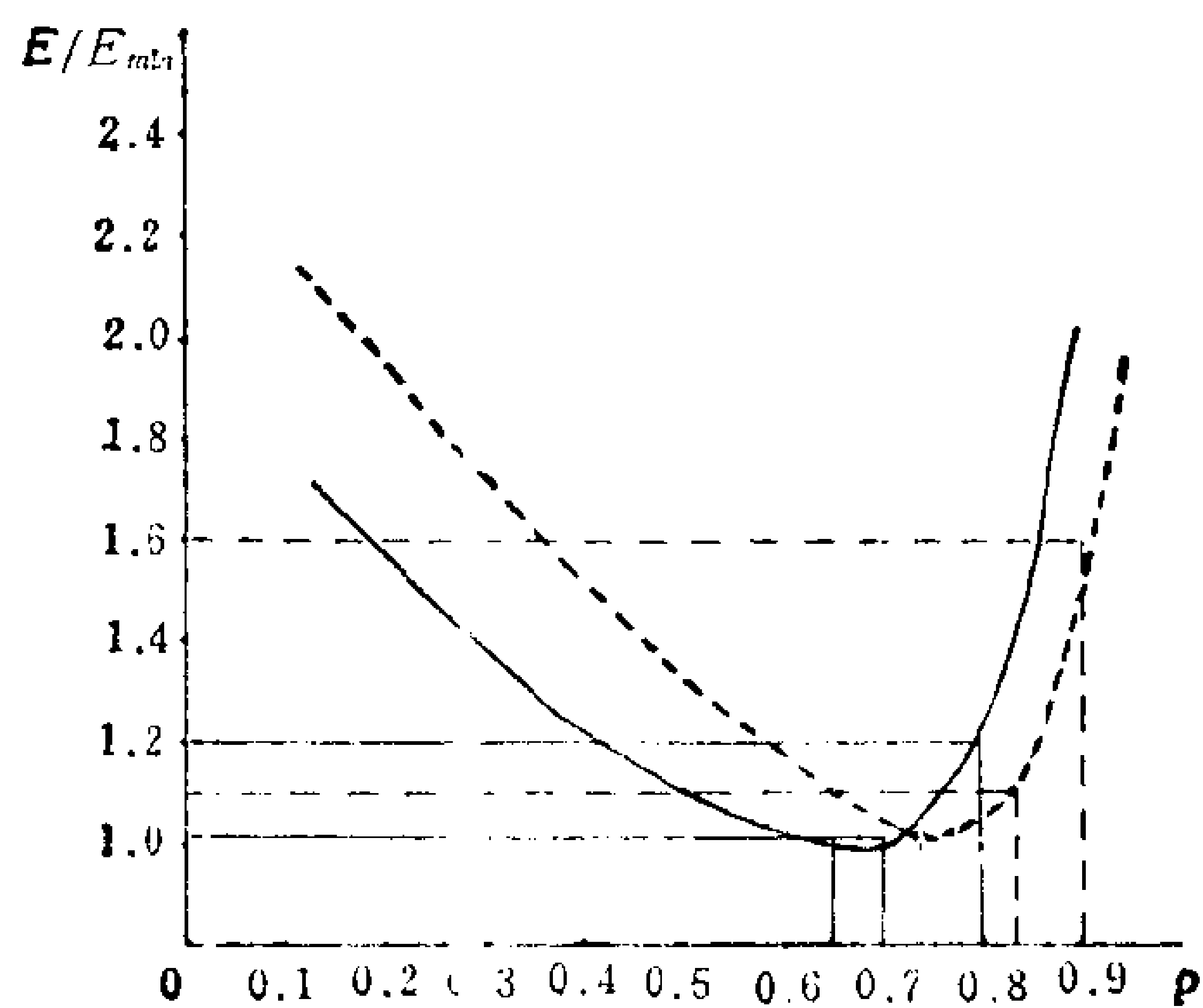



图9.2

## § 2　排队论的经验公式

根据李太勒公式：$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}$，或$L_{队}=\lambda W_{队}$.

因为$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$，所以$\lambda=\rho\mu$，$L_{队}=\rho\mu W_{队}$。

又因为服务系统内的顾客数等于排队的顾客加正在被服务的顾客即

$$L_{系}=L_{队}+\rho=\rho\mu W_{队}+\rho=\rho(1+\mu W_{队})。$$

又∵　$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{\rho(1+\mu W_{队})}{\lambda}=\frac{1+\mu W_{队}}{\mu}。$$

由此可见排队模型的运行指标可以用$\mu W_{队}$表示。下面我们利用该性质推导排队模型的经验公式。

### A.　单通道排队系统

#### (1) $E_K|D|1$型

以一、二、四、八阶爱尔朗流，固定服务时间，不同的负荷水平，在电子计算机上模拟$\mu W_{队}$得到的结果列于下表：

$\mu W_{队}$表　　表*

| ρ | 爱尔朗阶数 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 4 | 8 |
| 0.1 | 0.005 | 0.009 | 0.0001 | 0.000 |
| 0.2 | 0.125 | 0.021 | 0.002 | 0.000 |
| 0.3 | 0.214 | 0.050 | 0.008 | 0.0002 |
| 0.4 | 0.333 | 0.102 | 0.022 | 0.002 |
| 0.5 | 0.500 | 0.173 | 0.050 | 0.009 |
| 0.6 | 0.750 | 0.285 | 0.103 | 0.025 |
| 0.7 | 1.166 | 0.483 | 0.196 | 0.056 |
| 0.8 | 2.000 | 0.886 | 0.400 | 0.155 |
| 0.9 | 4.500 | 2.140 | 1.250 | 0.583 |

由表可知，$\rho$与$\mu W_{队}$成抛物线关系。

我们知道，顾客到达为最简单流，服务时间固定时，$\mu W_{队}=\dfrac{\rho}{2(1-\rho)}$。

顾客到达流为$a$阶爱尔朗流时，

$$\mu W_{队}=\frac{\rho^a}{2(1-\rho^a)}.$$

或 $$2\mu W_{队}(1-\rho^a)=\rho^a;\quad 2\mu W_{队}-2\mu W_{队}\rho^a-\rho^a=0,$$

或 $$\rho^a=\frac{2\mu W_{队}}{1+2\mu W_{队}},$$

取对数，得

$$a\log\rho=\log\left(\frac{2\mu W_{队}}{1+2\mu W_{队}}\right),$$

∴ $$a=\frac{\log\left(\dfrac{2\mu W_{队}}{1+2\mu W_{队}}\right)}{\log\rho}.$$

当 $\rho=0.1$时，查$\mu W_{队}$值表（*）得$\mu W_{队}=0.055$，

∴ $$a=\frac{\log\left(\dfrac{2\times0.055}{1+2\times0.055}\right)}{\log0.1}=1.$$

即当$a=1$时，顾客按最简单流到来。

当$\rho=0.5$时，查表（*）得$\mu W_{队}=0.5$，（$l=1$）。计算得$a=1$。

由此，可见，当顾客到达间隔时间服从指数分布时，$a=1$。

同理可检验计算，当$l=2$时，$a=2$。

当$l=4$时，$a=3.6$；当$l=8$时，$a=6$。

因此，我们有经验公式：

当顾客到达流为二阶爱尔朗流时，

$$W_{队} = \frac{\rho^2}{2\mu(1-\rho^2)}.$$

当　$l=4$时，

$$W_{队} = \frac{\rho^{3.6}}{2\mu(1-\rho^{3.6})}.$$

当　$l=8$时，

$$W_{队} = \frac{\rho^6}{2\mu(1-\rho^6)}.$$

**例题9.4**　顾客按二阶爱尔朗流到达，其强度$\lambda=1$；固定服务时间，$\mu=2$。求效率指标。

**解1**　按文献[10]推荐的公式，

$$W_{队} = \frac{\phi_0 - 1 + 2\rho^2}{4\mu\rho(1-\rho)}.$$

式中$\phi_0$—零概率，取决于系统负荷水平，当

$\rho=0.5$时，$\phi_0=0.67$。

$$W_{队} = \frac{0.67-1+2\times0.5^2}{4\times2\times0.5(1-0.5)} = 0.085.$$

$$L_{队} = \frac{\phi_0-1+2\rho^2}{4(1-\rho)} = 0.085.$$

$$L_{系} = L_{队}+\rho = 0.085+0.5 = 0.585.$$

$$W_{系} = W_{队}+\frac{1}{\mu} = 0.085+\frac{1}{2} = 0.585.$$

**解2**　按我们的经验公式计算。

$$W_{队} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)\mu} = \frac{0.5^2}{2(1-0.5^2)2} = 0.083.$$

$$W_{系} = W_{队}' + \frac{1}{\mu} = 0.083+\frac{1}{2} = 0.583.$$

$$L_{队} = \lambda W_{队} = 1\times0.083 = 0.083.$$

$$L_{系} = L_{队}+\rho = 0.083+0.5 = 0.583.$$

两种计算结果十分接近，因此，我们说，经验公式计算结

果可以应用。

现在用经验公式检查服务员的能力是否合理。如果顾客停闲费用为$c_1=0.75$元，服务员闲置费用为$c_2=2$元

总费用方程为：

$$E=L_{队}c_1+c_2(1-\rho).$$

∵
$$L_{队}=\lambda W_{队}=\frac{\lambda\rho^2}{2\mu(1-\rho^2)}=\frac{\rho^3}{2(1-\rho^2)},$$

∴
$$E=\frac{c_1\rho^3}{2(1-\rho^2)}+c_2(1-\rho),$$

$$\frac{dE}{d\rho}=\frac{6c_1\rho^2(1-\rho^2)+4\rho^4c_2}{4(1-\rho^2)}-c_2=0,$$

故
$$\rho^4(c_1+2c_2)-\rho^2(3c_1+4c_2)+2c_1=0,$$

用求根公式：

$$\rho^2_{合}=\frac{(3c_1+4c_2)\pm\sqrt{(3c_1+4c_2)^2-4\times 2c_2(c_1+2c_2)}}{2(c_1+2c_2)}$$

$$=\frac{(2.25+8)\pm\sqrt{10.25^2-8\times 2\times 4.75}}{2\times 4.75}=0.512.$$

∴
$$\rho_{合理}=\sqrt{0.512}=0.715.$$

即服务员合理能力应为：$\mu^*=\frac{\lambda}{\rho_{合理}}=\frac{1}{0.715}=4$。

而我们现有能力只有2。所以不合理。

为了检验经验公式的正确性，在电子计算机上模拟了几种排队模型。把模拟结果和用经验公式计算结果一并列于244面表。

由表可见，按经验公式计算的结果和在电子计算机上模拟的结果差距很小。因而，经验公式可以用来求解实际问题。

(2) **D|G|1型**

在实际生活中，存在着这样的排队模型：顾客按定长分布（等间隔）来到服务系统，其强度为λ，即

**顾客到达流服从2、4、8、阶爱尔朗流，固定服务时间的$L_{队}$与$L_{系}$表**

| $\rho$ | 两阶爱尔朗流 | | | | 四阶爱尔朗流 | | | | 八阶爱尔朗流 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 计算机模拟 | | 经验公式 | | 计算机模拟 | | 经验公式 | | 计算机模拟 | | 经验公式 | |
| | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ |
| 0.1 | 0.0009 | 0.1009 | 0.0005 | 0.1005 | 0 | 0.1000 | 0 | 0.1000 | 0 | 0.1000 | 0 | 0.1000 |
| 0.2 | 0.0042 | 0.2042 | 0.0042 | 0.2042 | 0.0003 | 0.2003 | 0.0003 | 0.2003 | 0 | 0.2000 | 0 | 0.2000 |
| 0.3 | 0.0150 | 0.3150 | 0.0150 | 0.3150 | 0.0023 | 0.3023 | 0.0022 | 0.3022 | 0.0001 | 0.3001 | 0.0001 | 0.3001 |
| 0.4 | 0.0408 | 0.4408 | 0.0380 | 0.4380 | 0.0088 | 0.4088 | 0.0083 | 0.4083 | 0.0009 | 0.4009 | 0.0003 | 0.0408 |
| 0.5 | 0.0851 | 0.5851 | 0.0840 | 0.5840 | 0.0252 | 0.5252 | 0.0220 | 0.5220 | 0.0045 | 0.5045 | 0.0040 | 0.5040 |
| 0.6 | 0.1720 | 0.7720 | 0.1680 | 0.7680 | 0.0622 | 0.6622 | 0.0572 | 0.6572 | 0.0151 | 0.6151 | 0.0147 | 0.6147 |
| 0.7 | 0.3380 | 1.0380 | 0.3360 | 1.0300 | 0.1370 | 0.8370 | 0.1350 | 0.8350 | 0.0464 | 0.7464 | 0.0464 | 0.7464 |
| 0.8 | 0.7090 | 1.5000 | 0.7110 | 1.5110 | 0.3210 | 1.1210 | 0.3250 | 1.1250 | 0.1239 | 0.9239 | 0.1417 | 0.9417 |
| 0.9 | 1.9260 | 2.8200 | 1.9170 | 2.8170 | 1.1250 | 2.0255 | 0.9750 | 1.8700 | 0.5243 | 1.4243 | 0.5100 | 1.4100 |

$$t_{间}=\text{const},\ \lambda=\frac{1}{t_{间}}.$$

服务时间可能是固定不变的，或具有不同的概率分布。

为了计算排队模型的效率指标，需要有经验公式，并借电子计算机模拟验证.为此,我们在计算机上模拟$\mu W_{队}$值,系统负荷$\rho$自0.1到0.9和指数分布服务时间或2、4、8阶爱尔朗分布服务时间。计算结果列于下表：

**到达流为定长分布的$\mu W_{队}$值**

| $\rho$ | $K=1$ | $K=2$ | $K=4$ | $K=8$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.0063 | 0 | 0 | 0 |
| 0.3 | 0.0433 | 0.0053 | 0 | 0 |
| 0.4 | 0.1322 | 0.0294 | 0.003 | 0.0002 |
| 0.5 | 0.2609 | 0.0790 | 0.0177 | 0.0022 |
| 0.6 | 0.4989 | 0.1743 | 0.0566 | 0.0126 |
| 0.7 | 0.8845 | 0.3663 | 0.1314 | 0.0444 |
| 0.8 | 1.6214 | 0.7568 | 0.3190 | 0.1255 |
| 0.9 | 4.2939 | 1.9606 | 0.8775 | 0.4180 |

分析上表中的数值可见，$\mu W_{队}$的值与负荷$\rho$之间的关系为

$$\mu W_{队}=\frac{\rho^{b+1}}{2(1-\rho b)}.$$

式中　$b$—幂指数，它取决于服务时间的概率分布律。

为了确定$b$值，我们按下述方法考虑：

$$\frac{\mu W_{队}}{\rho}=\frac{\rho^{b}}{2(1-\rho^{b})};$$

$$\frac{2\mu W_{队}}{\rho}-\frac{2\mu W_{队}\rho^{b}}{\rho}-\rho^{b}=0;$$

$$\frac{2\mu W_{队}}{\rho}-\rho^{b}\left(\frac{2\mu W_{队}}{\rho}+1\right)=0;$$

$$\rho^b = \frac{2\mu W_{队}}{2\mu W_{队}+\rho};$$

$$b\log\rho = \log \frac{2\mu W_{队}}{2\mu W_{队}+\rho};$$

$$b = \frac{\log\frac{2\mu W_{队}}{2\mu W_{队}+\rho}}{\log\rho}.$$

把计算得到的 $b$ 值代入不同的服务时间分布律中，当服务时间为指数分布时，$b=0.93$；为二阶爱尔朗时，$b=1.90$；四阶爱尔朗时，$b=3.80$八阶爱尔朗时，$b=6.50$。

现在可以写出各排队模型的 $L_{队}$：

a）定长分布流，指数服务时间

$$\mu W_{队} = \frac{\rho^{1.93}}{2(1-\rho^{0.93})};$$

$$L_{队} = \frac{\rho^{2.93}}{2(1-\rho^{0.93})}.$$

b）定长分布流，二阶爱尔朗分布服务时间

$$L_{队} = \frac{\rho^{3.9}}{2(1-\rho^{1.9})}.$$

c）定长分布流，四阶爱尔朗分布服务时间

$$L_{队} = \frac{\rho^{5.8}}{2(1-\rho^{3.8})}.$$

d）定长分布流，八阶爱尔朗分布服务时间

$$L_{队} = \frac{\rho^{8.5}}{2(1-\rho^{6.5})}.$$

根据不同的 $\rho$ 计算上述公式中的 $L_{队}$，并用电子计算机模拟得到的 $L_{队}$，一并列于下表。由表可见，两者相差很小。因而，经验公式可以用来求解实际问题。

## 顾客到达流为定长分布、任意服务时间模型的效率指标表

| $\rho$ | 服务时间为指数分布 | | | | 服务时间为二阶爱尔朗 | | | | 服务时间为四阶爱尔朗 | | | | 服务时间为八阶爱尔朗 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 模拟 | | 经验公式 | | 模拟 | | 经验公式 | | 模拟 | | 经验公式 | | 模拟 | | 经验公式 | |
| | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ | $L_{队}$ | $L_{系}$ |
| 0.1 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 | 0 | 0.100 |
| 0.2 | 0.001 | 0.201 | 0.005 | 0.205 | 0 | 0.200 | 0.001 | 0.201 | 0 | 0.200 | 0 | 0.200 | 0 | 0.200 | 0 | 0.200 |
| 0.3 | 0.013 | 0.313 | 0.021 | 0.321 | 0.001 | 0.301 | 0.003 | 0.303 | 0 | 0.300 | 0 | 0.300 | 0 | 0.300 | 0 | 0.300 |
| 0.4 | 0.053 | 0.453 | 0.059 | 0.450 | 0.011 | 0.411 | 0.017 | 0.417 | 0.001 | 0.401 | 0.001 | 0.401 | 0 | 0.400 | 0 | 0.400 |
| 0.5 | 0.130 | 0.630 | 0.138 | 0.638 | 0.039 | 0.539 | 0.046 | 0.545 | 0.009 | 0.509 | 0.008 | 0.508 | 0.001 | 0.501 | 0.001 | 0.501 |
| 0.6 | 0.209 | 0.899 | 0.206 | 0.896 | 0.104 | 0.704 | 0.109 | 0.709 | 0.034 | 0.634 | 0.027 | 0.627 | 0.007 | 0.607 | 0.007 | 0.607 |
| 0.7 | 0.619 | 1.319 | 0.621 | 1.321 | 0.255 | 0.965 | 0.253 | 0.953 | 0.092 | 0.792 | 0.085 | 0.785 | 0.031 | 0.731 | 0.027 | 0.722 |
| 0.8 | 1.297 | 2.097 | 1.385 | 2.165 | 0.606 | 1.406 | 0.604 | 1.404 | 0.255 | 1.055 | 0.209 | 1.3090 | 0.100 | 0.900 | 0.098 | 0.898 |
| 0.9 | 3.865 | 4.765 | 3.950 | 4.850 | 1.765 | 2.665 | 1.800 | 2.700 | 0.700 | 1.690 | 0.817 | 1.717 | 0.376 | 1.276 | 0.413 | 1.313 |

**例题9.5** 汽车到达某厂仓库服从定长分布，强度为 $\lambda=5$ 辆/时。装车时间为指数分布，期望值为$\tau=0.14$小时。试求：$W_{队}$，$L_{队}$和$L_{系}$。

**解：** 服务强度为 $\mu=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{1}{0.14}=7.14$辆/时.

系统负荷为$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{5}{7.14}=0.7$。

$$W_{队}=\frac{\rho^{1.93}}{2\mu(1-\rho^{0.93})}=\frac{0.7^{1.93}}{2\times7.14(1-0.7^{0.93})}$$

$$=0.1244\text{小时}。$$

$$L_{队}=W_{队}\cdot\lambda=0.1244\times5=0.622\text{辆}。$$

$$L_{系}=L_{队}+\rho=0.622+0.7=1.322\text{辆}。$$

在计算机上模拟得：$W_{队}=0.1238$；$L_{队}=0.619$；$L_{系}=1.319$。

**例题9.6** 设计某仓库：已知，汽车到达仓库按定长分布考虑；其间隔为0.2小时，卸车时间服从指数分布.求卸车机械合理能力。设汽车待卸一小时的费用为 1 元/时，而卸车机械闲置一小时为 2 元。

**解** 汽车到达强度为$\lambda=\dfrac{1}{0.2}=5$辆/时，

排队待卸汽车的平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^{2.93}}{2(1-\rho^{0.93})}.$$

系统的总费用方程为

$$E=C_{卸}L_{队}+C_{机}(1-\rho)=\frac{C_{卸}\rho^{2.93}}{2(1-\rho^{0.93})}+C_{机}(1-\rho)$$

由于幂指数是小数不能用求导方法取得合理卸车机能力，而改用如下方法：计算$L_{队}$，对不同的$\rho$值求$E$.其结果如下表所列。

| $\rho$ | $\rho^{0.93}$ | $\rho^{2.93}$ | $C_{卸}L_{队}$ | $C_{机}(1-\rho)$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.123 | 0.001 | 0 | 1.800 | 1.800 |
| 0.2 | 0.224 | 0.008 | 0.005 | 1.600 | 1.605 |
| 0.3 | 0.331 | 0.030 | 0.022 | 1.400 | 1.422 |
| 0.4 | 0.425 | 0.068 | 0.059 | 1.200 | 1.259 |
| 0.5 | 0.525 | 0.131 | 0.138 | 1.000 | 1.138 |
| 0.6 | 0.621 | 0.224 | 0.295 | 0.800 | 1.095 |
| 0.7 | 0.717 | 0.351 | 0.620 | 0.600 | 1.220 |
| 0.8 | 0.812 | 0.520 | 1.380 | 0.400 | 1.780 |
| 0.9 | 0.906 | 0.734 | 3.700 | 0.200 | 3.900 |

由表可见，最少费用为$\rho=0.6$时，因此，合理能力为

$$\mu^*=\frac{\lambda}{\rho}=\frac{5}{0.6}=8.33\text{辆/时}.$$

为了便于确定 $b$ 值我们作出下图.

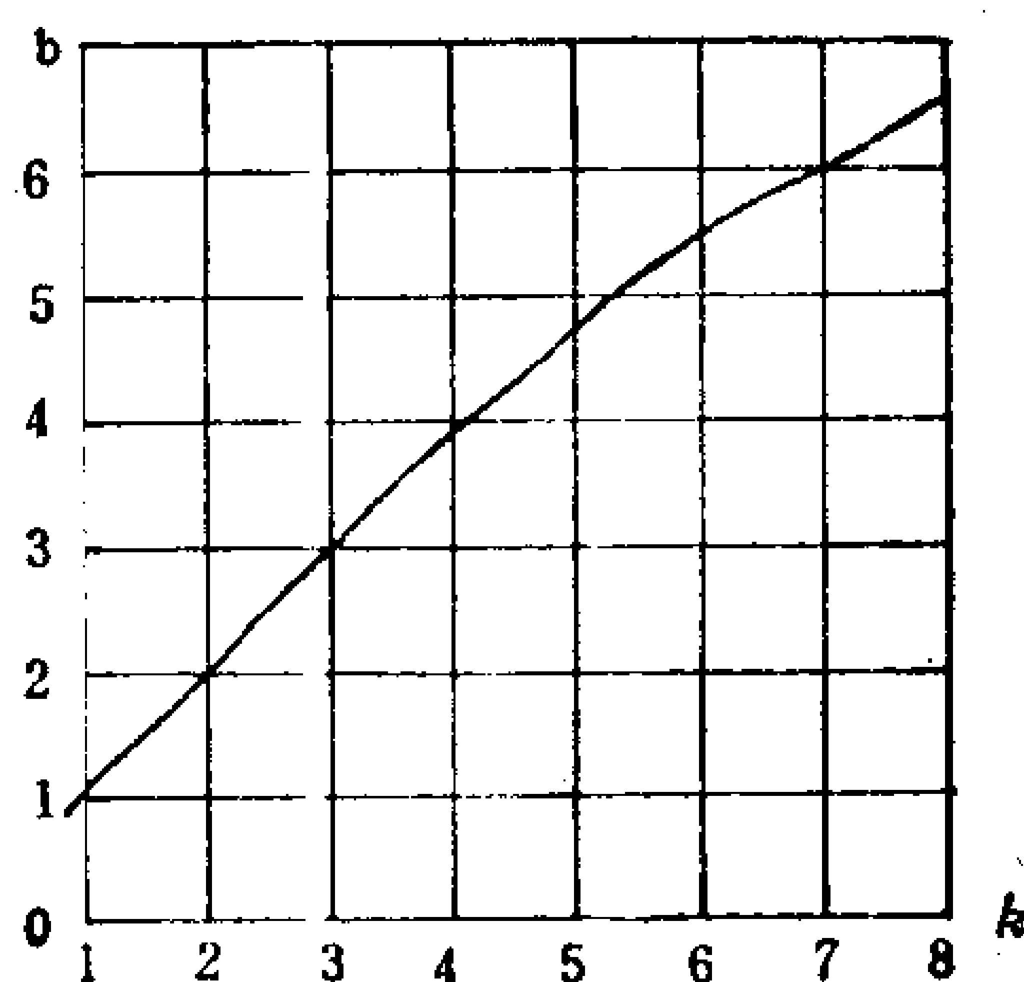



图9.3

图中$b$为幂指数，$k$为爱尔朗阶数.

### (3) M|G|1型

设单通道排队服务系统，顾客到达服从指数分布，服务时间为任意分布。伯拉千克和欣钦〔10〕〔1〕各自独立地得到这种模

型的效率指标$W_{队}$即

$$W_{队}=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}(1+v_{服}{}^{2}).$$

式中　$v_{服}$—服务时间的偏离系数.

不同的服务时间分布，有不同的$W_{队}$. 若服务时间为定长分布，则$v_{服}=0$,

$$W_{队}=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}.$$

若服务时间为指数分布，则$v_{服}=1$.

$$W_{队}=\frac{\rho}{\rho(1-\rho)}$$

若服务时间为K阶爱尔朗分布，则$v_{服}=\frac{1}{\sqrt{K}}$,

$$W_{队}=\frac{1+K}{2K}\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

**例题9.7**　矿石列车到达冶炼工厂。列车到达间隔时间服从指数分布，期望值为$t_{间}=2$小时，车列由30辆车组成，卸车时间服从10阶爱尔朗分布，平均卸车时间为$\tau=1$列/小时. 试求：$W_{队}$；$L_{队}$；

**解**　每次到达的车辆可看作一个顾客.

$$\lambda=\frac{1}{2}=0.5\text{列/时；}\qquad \because\qquad \mu=1\text{列/时}$$

$$\therefore\qquad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.5.$$

车列平均待解时间为：

$$W_{队}=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}\frac{1+K}{K}=\frac{0.5}{2\times1\times0.5}\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

$$=0.55\text{小时},$$

待卸车列平均数为：

$L_{队}=W_{队}\cdot\lambda=0.55\times0.5=0.275$列。

例题(8) 计算资料同上例。如果列车到达间隔时间和服务时间都服从指数分布。求$L_{队}$和$W_{队}$

**解** $W_{队}=\dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\dfrac{0.5}{1\times0.5}=1$小时；

$L_{队}=W_{队}\cdot\lambda=1\times0.5=0.5$列。

即本题的效率指标比上例增加近2倍。

**例题9.9** 如果已知：列车待卸1小时的费用为 $C_{卸}^{待}=2$元，卸车机闲置1小时费用为$C_{机}=10$元。求前面两个例题中的卸车机合理生产能力。

**解** 卸车系统费用期望方程式为

$$E=C_{卸}L_{队}+C_{机}(1-\rho)=\frac{C_{卸}\rho^2\left(1+\frac{1}{K}\right)}{2(1-\rho)}+(1-\rho)C_{机},$$

求$\dfrac{dE}{d\rho}$并使之为零。即得合理的系统负荷

$$\rho^*=1-\frac{\sqrt{C_{卸}\left(1+\frac{1}{K}\right)\left[2C_{机}+C_{卸}\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]}}{C_{卸}\left(1+\frac{1}{K}\right)+2C_{机}}.$$

当服务时间为指数分布时，

$$\rho^*=1-\frac{\sqrt{2\times2(20+2\times2)}}{2\times2+20}=0.59,$$

$$\mu^*=\frac{\lambda}{\rho^*}=\frac{0.5}{0.59}=0.85列/时.$$

当服务时间为10阶爱尔朗分布时，

$$\rho^*=1-\frac{\sqrt{2\times1.1(20+2\times1.1)}}{2\times1.1+20}=0.68,$$

$$\mu^* = \frac{\lambda}{\rho^*} = \frac{0.5}{0.68} = 0.74\text{列/时}.$$

比较两种服务系统：1)服务时间为指数分布$\lambda=0.5$,$\mu=1$，$\rho=0.5$；2) 服务时间为 10 阶爱尔朗分布；$K=10$，$\lambda=0.5$，$\mu=0.74$，$\rho=0.68$。所以第二种服务系统的费用减少值为：

$$L'_{队}C_{卸} + C_{机}(1-\rho_1) - L^2_{队}C_{卸} - C_{机}(1-\rho_2)$$

$$= 0.5\times 2 + 10(1-0.5) - \frac{2\times 0.68^2}{2(1-0.68)}$$

$$- 10(1-0.68) = 6 - 4.64 = 1.36\text{元/时}.$$

**(4) $E_l|E_K|1$型**

在交通运输中，经常遇到单通道排队服务系统，顾客到达间隔时间为$l$阶爱尔朗分布，服务时间为$K$阶爱尔朗分布。苏联教授B. M. Акулиничев[9] 建议采用经验公式

$$W_{队} = \frac{K+l}{2\mu K(l+\rho-1)} \frac{\rho^2}{(1-\rho)},$$

从而 $$L_{队} = \frac{\rho^3}{2(1-\rho)} \frac{K+l}{K(l+\rho-1)}. \qquad (*)$$

把不同顾客到达流和服务时间的$l$和$K$值代入可得下表：

**爱尔朗～爱尔朗系统内排队顾客平均数$L_{队}$**

| 顾客到达流分布律 | 服务时间分布律 | | |
|---|---|---|---|
| | 指数分布 $K=1$ | 爱尔朗分布 $K=2$ | $K=3$ |
| 爱尔朗流 $l=2$ | $L_{队}=\frac{1.5\rho^3}{1-\rho^2}$ | $L_{队}=\frac{\rho^3}{1-\rho^2}$ | $L_{队}=\frac{0.83\rho^3}{(1-\rho^2)}$ |
| $l=3$ | $L_{队}=\frac{2\rho^3}{(1-\rho)(2+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{1.25\rho^3}{(1-\rho)(2+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{\rho^3}{(1-\rho)(2+\rho)}$ |
| $l=4$ | $L_{队}=\frac{2.5\rho^3}{(1-\rho)(3+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{1.5\rho^3}{(1-\rho)(3+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{1.16\rho^3}{(1-\rho)(3+\rho)}$ |
| $l=5$ | $L_{队}=\frac{3\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{1.75\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{1.33\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}$ |
| $l=6$ | $L_{队}=\frac{3.5\rho^3}{(1-\rho)(5+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{2\rho^3}{(1-\rho)(5+\rho)}$ | $L_{队}=\frac{1.5\rho^3}{(1-\rho)(5+\rho)}$ |

续表

| 顾客到达流分布律 | 服务时间分布律 | | |
|---|---|---|---|
| | $K=4$ | $K=5$ | $K=6$ |
| 爱尔朗流 $l=2$ | $L_{队}=\dfrac{0.75\rho^3}{(1-\rho^2)}$ | $L_{队}=\dfrac{0.70\rho^3}{1-\rho^2}$ | $L_{队}=\dfrac{0.66\rho^3}{1-\rho^2}$ |
| $l=3$ | $L_{队}=\dfrac{0.88\rho^3}{(1-\rho)(2+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{0.80\rho^3}{(1-\rho)(2+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{0.75\rho^3}{(1-\rho)(2+\rho)}$ |
| $l=4$ | $L_{队}=\dfrac{\rho^3}{(1-\rho)(3+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{0.90\rho^3}{(1-\rho)(3+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{0.83\rho^3}{(1-\rho)(3+\rho)}$ |
| $l=5$ | $L_{队}=\dfrac{1.12\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{0.91\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}$ |
| $l=6$ | $L_{队}=\dfrac{1.25\rho^3}{(1-\rho)(5+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{1.10\rho^3}{(1-\rho)(5+\rho)}$ | $L_{队}=\dfrac{\rho^3}{(1-\rho)(5+\rho)}$ |

此外，顾客到达间隔时间为两阶爱尔朗分布，服务时间为指数分布时，〔10〕建议用如下公式：

$$\mu W_{队}=\frac{1-\phi_0}{\phi_0} \qquad (**)$$

式中　$\phi_0$—零状态概率．其值可按下表确定：

顾客按两阶爱尔朗分布到达服务时间为指数分布时的$\phi_0$值如下表所列

| $\rho$ | $\phi_0$ | $\rho$ | $\phi_0$ |
|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.98 | 0.55 | 0.64 |
| 0.15 | 0.96 | 0.60 | 0.58 |
| 0.20 | 0.94 | 0.65 | 0.52 |
| 0.25 | 0.92 | 0.70 | 0.46 |
| 0.30 | 0.88 | 0.75 | 0.39 |
| 0.35 | 0.84 | 0.80 | 0.32 |
| 0.40 | 0.80 | 0.85 | 0.25 |
| 0.45 | 0.75 | 0.90 | 0.18 |
| 0.50 | 0.70 | 0.95 | 0.07 |

根据上述两个公式（*）（**）计算其结果，相差很小。

**例题9.10** 汽车到达料库的间隔时间为五阶爱尔朗分布，平均到达间隔时间为0.2小时。卸车时间为指数分布，平均卸车时间为$\tau=0.1$小时。求$W_{队}$和$L_{队}$。

**解** 汽车到达强度$\lambda=\frac{1}{0.2}=5$辆/时；

卸车强度$\mu=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{0.1}=10$辆/时。

系统负荷水平$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{5}{10}=0.5$。

系统内排队顾客（汽车）的平均数为：

$$L_{队}=\frac{3\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}=\frac{3\times0.5^3}{0.5\times4.5}=0.166\text{辆}$$

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.166}{5}=0.033\text{小时。}$$

**例题9.11** 计算资料同上例。但汽车到达间隔时间为指数分布，而服务时间为10阶爱尔朗分布。试求$L_{队}$和$W_{队}$。

**解** $$L_{队}=\frac{\rho^2\left(1+\frac{1}{K}\right)}{2(1-\rho)}=\frac{0.25}{2\times0.5}\left(1+\frac{1}{10}\right)=0.275\text{辆}$$

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.275}{5}=0.055\text{小时}$$

计算结果表明：对系统效率顾客到达流比服务时间有更大的影响。

**例题9.12** 计算资料同上例。但顾客到达间隔时间和服务时间都是5阶爱尔朗分布。试求：$L_{队}$和$W_{队}$。

**解** $$L_{队}=\frac{\rho^3}{(1-\rho)(4+\rho)}=\frac{0.125}{0.5\times4.5}=0.0555\text{辆。}$$

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.0555}{5}=0.0111\text{小时。}$$

即比例题（11）小5倍。

**B.多通道排队系统**

**(1) $E_K|D|n$型**

设服务系统内配备两个服务员．顾客到达间隔时间服从指数分布，其强度为λ。每个服务员的服务时间固定不变．第一个服务员的服务强度为$\mu_1$，第二个服务员的服务强度为$\mu_2$。且$\mu_1=\mu_2$．系统处于极限平稳状态，即$(\mu_1+\mu_2)>\lambda$．

服务系统的总强度为$\mu=\mu_1+\mu_2$．

服务系统的负荷水平 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$0<\rho<1$．这种排队模型在交通运输业中经常遇到．例如，用几台能力相等的机械装卸煤，矿石，河砂，到达的汽车具有相同的型号；在货场集装箱装卸地点用两台吊车作业，吊车能力相同，运输工具类型相同．

设顾客（运输工具）按编号大小，顺序到达．到达间隔时间分别为$t_1$，$t_2$，…，$t_n$．

在开始服务时，第一个到达的顾客由一号服务员服务．第二个到达的顾客由二号服务员服务．由于$\mu_1=\mu_2=Const$，且$t_1>0$，所以第一个到达的顾客的服务完了时刻比第二个到达的顾客，服务完了时刻要早．因而第三个到达的顾客由一号服务员服务．因$t_2>0$，即第二个顾客比第三个顾客服务完了时刻要早，…依此类推．

当顾客到达间隔很大时，在该段时间内，两个服务员都闲了。顺次到达的顾客由先空的服务员给予服务．因此，编号为单数的顾客由一号服务员服务；编号为双数的顾客由二号服务员服务。即顾客到达流服从爱尔朗分布．或者说，在两通道服务系统内，顾客到达流为指数分布，服务时间固定不变，每个服务员的服务强度相等，$\mu_1=\mu_2$．则到达每个服务员处的顾客

流为两阶爱尔朗分布（$l=2$）。

同理可以推广到$l=3$，4，5，…等。

现在我们根据前面介绍过的单通道排队系统，顾客到达流为任意流，服务时间是固定不变的排队模型计算多通道排队系统的效率指标。

设有两通道服务系统，顾客到达间隔时间为指数分布，固定服务时间，即满足如下条件：

$$\mu_1=\mu_2,\ \mu_1+\mu_2=\mu,\ \rho=\frac{\lambda}{\mu},\ 0<\rho<1.$$

到每个服务员处的顾客流为两阶爱尔朗流。如果每条通道的负荷为：

$$\rho_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1},\ \rho_2=\frac{\lambda_2}{\mu_2};\ \rho_1=\rho_2=\rho.$$

则 每个服务员面前，排队顾客的平均数为

$$L_{队}^{1}=L_{队}^{2}=\frac{\rho^3}{2(1-\rho^2)}.$$

系统内排队顾客的平均数为

$$L_{队}=L_{队}^{1}+L_{队}^{2}=\frac{\rho^3}{1-\rho^2}.$$

同理，可导出不同顾客到达流的$L_{队}$，其结果列于下表

**固定服务时间，不同到达流时的$L_队$**

| 顾客到达流的分布律 | 多通道系统内顾客平均数 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 通道 1 | 通道 2 | 通道 3 | 通道 4 |
| 指数分布 | $L_队=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$ | $L_队=\frac{\rho^3}{(1-\rho^2)}$ | $L_队=\frac{1.5\rho^{3.8}}{1-\rho^{2.8}}$ | $L_队=\frac{2\rho^{4.58}}{1-\rho^{3.58}}$ |
| $l=2$ | $\frac{\rho^3}{2(1-\rho^2)}$ | $\frac{\rho^{4.58}}{(1-\rho^{3.58})}$ | $\frac{1.5\rho^{5.93}}{1-\rho^{4.93}}$ | $\frac{2\rho^7}{1-\rho^6}$ |
| $l=3$ | $\frac{\rho^{3.8}}{2(1-\rho^{2.8})}$ | $\frac{\rho^{5.93}}{(1-\rho^{4.93})}$ | $\frac{1.5\rho^{7.4}}{1-\rho^{6.4}}$ | $\frac{2\rho^{8.5}}{1-\rho^{7.5}}$ |
| $l=4$ | $\frac{\rho^{4.58}}{2(1-\rho^{3.58})}$ | $\frac{\rho^7}{(1-\rho^6)}$ | $\frac{1.5\rho^{8.5}}{(1-\rho^{7.5})}$ | — |
| $l=5$ | $\frac{\rho^{5.27}}{2(1-\rho^{4.27})}$ | $\frac{\rho^{7.8}}{(1-\rho^{6.8})}$ | — | — |
| $l=6$ | $\frac{\rho^{5.93}}{2(1-\rho^{4.93})}$ | $\frac{\rho^{8.5}}{(1-\rho^{7.5})}$ | — | — |
| $l=8$ | $\frac{\rho^7}{2(1-\rho^6)}$ | — | — | — |

**例题9.13** 成件货物仓库设计．设汽车到达强度$\lambda=20$辆/时．它服从指数分布．用义车卸车．每台义车机能力为$\mu=11.1$辆/时．如果汽车待卸一小时需要费用$C_卸=1$元/时，义车闲置一小时的费用为$C_义=1$元/时．试求合理的义车台数．

**解** $\lambda=20$，$\mu=11.1$ $\therefore \rho=\frac{20}{11.1}\approx 2$ 即为了保证作业的稳定性．$\rho<1$．即最少有二台义车．

我们用多通道系统的效率指标：

当用二台义车时，系统负荷$\rho=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}=\frac{20}{22.2}=0.9$；

用三台义车时，系统负荷：$\rho=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}=\frac{20}{33.3}=0.6$；

用四台义车时，$\rho=\frac{\lambda}{4\mu_1}=\frac{20}{44.4}=0.45$．

待卸汽车平均数：

当 $n=2$时， $L_{队}=\frac{\rho^3}{1-\rho^2}=\frac{0.9^3}{1-0.9^2}=3.94$辆。

$n=3$时， $L_{队}=\frac{1.5\rho^{3.8}}{1-\rho^{2.8}}=\frac{1.5\times0.6^{3.8}}{1-0.6^{2.8}}=0.284$。

$n=4$时， $L_{队}=\frac{2\rho^{4.58}}{1-\rho^{3.58}}=\frac{2\times0.45^{4.58}}{1-0.45^{3.58}}=0.055$。

期望费用方程

$$E=L_{队}C_{卸}+C_{叉}(1-\rho)n。$$

当$n=2$，$E=4.14$元/时。

$n=3$，$E=1.484$元/时。

$n=4$时，$E=2.255$元/时。

即仓库内配备三台叉车最为合理，虽然，这时叉车的利用率只有60%。如果配备四台叉车，则每小时增加费用0.77元，如果配备二台叉车，虽然它们的利用率可达90%，但每小时损失2.66元。

**例题9.14** 设计某仓库。汽车到达仓库卸车，每小时平均到达30辆，汽车到达间隔时间服从两阶爱尔朗分布。参加运输的汽车类型相同，载重相等。汽车待卸一小时的费用为2元。卸车时间固定不变。

设计师考虑采用下列卸车机械：

1）一台吊车，卸车强度$\mu_1=43$辆/时，闲置费为$C_{吊}=3$元/时。

2）二台吊车，$\mu_2=21.5$辆/时。$C_{吊}=2$元/时；

3）三台吊车，$\mu_3=14.3$辆/时。$C_{吊}=1$元/时。

其它条件相同，试求最优方案，即期望费用最少的方案。

**解** 汽车到达按二阶爱尔朗分布。对双通道说，每个通道的到达流为4阶爱尔朗分布，其强度为$\lambda_2=0.5\lambda$；若是三通道，每条通道的到达流则为六阶爱尔朗流，强度为$\lambda_3=0.333\lambda$。

系统负荷水平：

当 $n=1$时， $\rho=\frac{\lambda}{\mu_1}=\frac{30}{43}=0.70$。

$n=2$时， $\rho=\frac{0.5\lambda}{\mu_2}=\frac{15}{21.5}=0.70$。

$n=3$时， $\rho=\frac{0.333\lambda}{\mu_3}\frac{10}{14.3}=0.70$。

系统内排队汽车平均数：

$n=1$时， $L_{队}=\frac{\rho^3}{2(1-\rho^2)}=\frac{0.7^3}{2(1-0.7^2)}=0.336$，

$n=2$时， $L_{队}=\frac{\rho^{4.58}}{1-\rho^{3.58}}=\frac{0.7^{4.58}}{1-0.7^{3.58}}=0.270$。

$n=3$时， $L_{队}=\frac{1.5\rho^{5.93}}{1-\rho^{4.93}}=\frac{1.5\times0.7^{5.93}}{1-0.7^{4.93}}=0.146$。

上述计算表明．卸车机械越多，排队待卸汽车越少。但它不能说明哪一方案最合理．每台机械空闲的比例为

$$1-\rho=1-0.7=0.30.$$

即每小时每台机械平均有18分钟闲置．因此，系统期望费用：

$$E=L_{卸}C_{卸}+(1-\rho)nC_{机}.$$

当 $n=1$时，$E=0.336\times2+(1-0.70)\times3=1.57$元。

$n=2$时，$E=0.270\times2+(1-0.70)+2\times2=1.74$元。

$n=3$时，$E=0.146\times2+(1-0.70)\times3\times1=1.19$元。

即在其它条件相同条件下，仓库配置三台卸车机械最为合理．如果汽车到达仓库的间隔时间服从指数分布．配备三台卸车机，在其它相同条件下，排队待卸汽车平均为0.58辆。

减少排队汽车可以节省的费用为

$$\ni=(L_{队}-L'_{队})C_{机}=(0.580-0.146)\times2=0.868元/时.$$

因此，顾客到达越均衡，服务系统的效率指标越好。

(2) $\mathbf{E}_l|\mathbf{E}_k|n$型

设服务系统配备 $n$ 个服务员。顾客到达间隔时间服从 $l$ 阶爱尔朗分布。顾客到达强度 $\lambda$ 。每个服务员的服务强度为 $\mu$ 。每个服务员为顾客服务的时间为 $k$ 阶爱尔朗分布。系统的负荷为

$$\rho=\frac{\lambda}{n\mu};\quad 0<\rho<1.$$

这种排队模型在现实生活中，经常存在。例如，工厂仓库内配置两台以上同类型的装卸机械；在货场上配置几台调机等。

这些模型的效率指标可以应用统计试验法求得。但在具体情况下，用统计试验法只能得到模型的部分特征，并且要花大量的计算时间。因而，需要有经验公式解类似的问题。

文献〔7〕〔8〕 建议多通道排队模型中，当泊松流，任意服务时间时，可以采用下式计算排队顾客的平均数：

$$L_{队}=L_{队}(M/M/n)\ \frac{1+V_{服}{}^2}{2}.$$

$$\because \qquad \nu^2{}_{服}=\frac{1}{k},$$

$$\therefore \qquad L_{队}=L_{队}(M/M/n)\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

式中　$L_{队}(M/M/n)$—多通道排队服务系统；顾客到达间隔时间和服务时间都服从指数分布；

$\nu_{服}$—服务时间的偏离系数；

$K$—爱尔朗阶数。

上述公式和电子计算机模拟和相比结果，误差不大。因而，在解实际问题时可以考虑。

不过在交通运输中，经常遇到的除最简单流外，还有爱尔朗流。因此，我们将考虑顾客到达流具有一定程度的调整性，

即爱尔朗阶数 $l$ . 引入的因子将在不同程度上影响服务系统的效率指标。这个因子为

$$\frac{\rho^m}{1-(1-\rho)\frac{1}{\sqrt{K}}}$$

即当爱尔朗流，爱尔朗服务时间时，系统内排队顾客平均数可按下式确定

$$L_{队}=L_{队}(M/M/n)\frac{\rho^m(l+k)}{2l[k-(1-\rho)\sqrt{k}]}.$$

取对数，整理后写成

$$\log\frac{2L_{队}l[k-(1-\rho)\sqrt{k}]}{L_{队}(M/M/n)(l+k)}=m\log\rho. \qquad (*)$$

根据〔7〕，用统计试验法得到的特征数，计算上式等号左边，(其值取决于 $\rho$ )。它在对数轴上能够很好地表示一条直线，且经过点(1,1)。因而建议的经验公式是恰当的。

用最小二乘法确定( * )中的指数 $m$.对不同的爱尔朗阶数和服务员的数目的 $m$ 值列于右表

m值表

| 爱尔朗阶数$l$ | 服务员数目 $n$ | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 2 | 1.32 | 1.50 | 1.63 |
| 4 | 1.54 | 1.85 | 2.07 |
| 8 | 1.70 | 2.10 | 2.38 |

进一步分析表明，$m,l$之间的关系式为

$$m=a-bl^{-0.6}$$. 如下图表所示。

文献〔7〕用电子计算机模拟，其结果列于下表(表中还列有用经验公式计算的结果)：

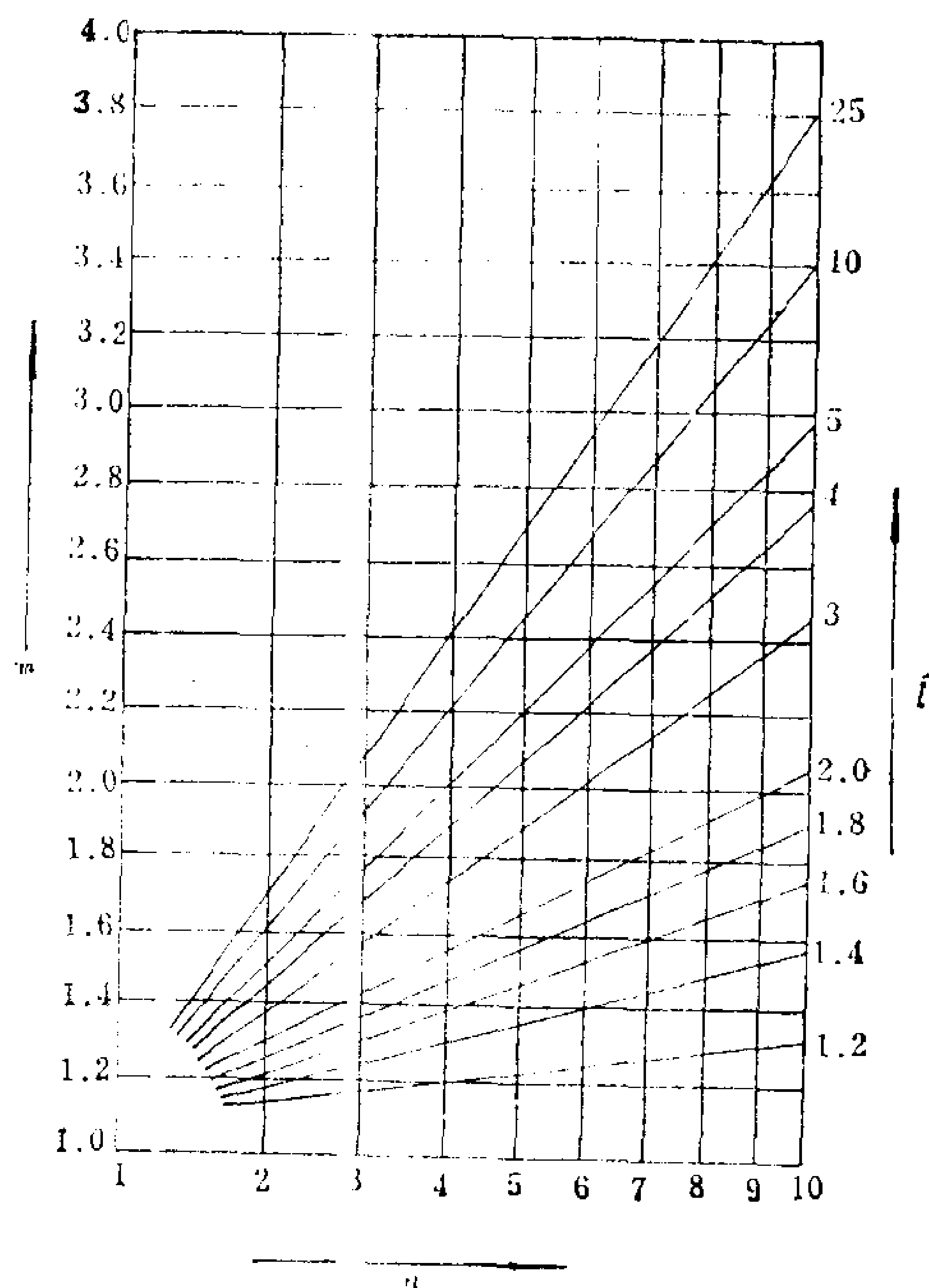



图9.4

| n | ρ | K = 1 | | K = 2 | | K = 4 | | K = 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 按经验公式计算 | 电子计算机模拟 | 按经验公式计算 | 电子计算机模拟 | 按经验公式计算 | 电子计算机模拟 | 按经验公式计算 | 电子计算机模拟 |
| 2 | 0.5 | 0.155 | 0.161 | 0.103 | 0.099 | 0.078 | 0.068 | 0.064 | 0.051 |
| | 0.6 | 0.300 | 2.294 | 0.200 | 0.205 | 0.150 | 0.148 | 0.125 | 0.102 |
| | 0.7 | 0.571 | 0.579 | 0.381 | 0.398 | 0.286 | 0.280 | 0.238 | 0.213 |
| | 0.8 | 1.156 | 1.111 | 0.771 | 0.829 | 0.578 | 0.569 | 0.482 | 0.497 |
| | 0.9 | 2.994 | 2.989 | 1.996 | 2.103 | 1.497 | 1.512 | 1.248 | 1.278 |
| 3 | 0.5 | 0.065 | 0.069 | 0.043 | 0.043 | 0.032 | 0.030 | 0.027 | 0.021 |
| | 0.6 | 0.144 | 0.143 | 0 096 | 0.106 | 0.072 | 0.072 | 0.060 | 0.052 |
| | 0.7 | 0.305 | 0.303 | 0.203 | 0.222 | 0.152 | 0.166 | 0.127 | 0.121 |
| | 0.8 | 0.674 | 0.639 | 0.431 | 0.508 | 0.337 | 0.355 | 0.281 | 0.300 |
| | 0.9 | 1.878 | 1.860 | 1.252 | 1.341 | 0.939 | 0.975 | 0.782 | 0.806 |

由表可见，两种计算结果，误差很小，因此，经验公式可以用来解决实际问题。

多通道爱尔朗流，爱尔朗服务时间的经验公式列于下表：

| $n$ | $W_{队}$ | $L_{队}$ | $m$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $\dfrac{\rho^{2+m}(l+K)}{2l\mu(1-\rho^2)[K-(1-\rho)\sqrt{K}]}$ | $\dfrac{\rho^{3+m}(l+K)}{l(1-\rho^2)[K-(1-\rho)\sqrt{K}]}$ | $2.08-1.08l^{-0.5}$ |
| 3 | $\dfrac{3\rho^{3+m}(l+K)}{2l\mu(1-\rho)(2+4\rho+3\rho^2)[K-(1-\rho)\sqrt{K}]}$ | $\dfrac{9\rho^{4+m}(l+K)}{2l(1-\rho)(2+4\rho+3\rho^2)[K-(1-\rho)\sqrt{K}]}$ | $2.7-1.7l^{-0.5}$ |
| 4 | $\dfrac{4\rho^{4+m}(l+K)}{l\mu(1-\rho)(3+9\rho+12\rho^2+8\rho^3)[K-(1-\rho)\sqrt{K}]}$ | $\dfrac{16\rho^{5+m}(l+K)}{l(1-\rho)(3+9\rho+12\rho^2+8\rho^3)[K-(1-\rho)\sqrt{K}]}$ | $3.14-2.14l^{-0.5}$ |

**例题9.15** 某农机厂有两个大型金属仓库。到达第一仓库的每天有10辆车，库内用桥式吊车卸货，卸车强度为$\mu_1=0.65$辆/时；在第二仓库每天有26辆车到达。仓库内使用二台桥吊卸车。每台吊车能力都是$\mu=0.65$辆/时。车辆到达间隔时间为指数分布，卸车时间服从四阶爱尔朗分布。车辆待卸一小时的费用为$c_{卸}=0.1$元；桥吊闲置一小时的费用为$c_{吊}=2$元。试求车辆平均待卸时间$W_{队}$，系统期望费用。

**解1** 车辆到达第一仓库的强度。

$$\lambda_1=\frac{10}{24}=0.42\text{辆/时},$$

桥吊负荷 $\rho_1=\dfrac{\lambda_1}{\mu}=\dfrac{0.42}{0.65}=0.69,$

平均待卸时间和待卸车辆平均数，可按单通道服务系统，顾客到达流为泊松流，服务时间为爱尔朗分布：

$$W_{队}'=\frac{\rho_1\left(1+\frac{1}{k}\right)}{2\mu(1-\rho_1)}=\frac{0.69\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\times0.69(1-0.69)}$$

$= 1.79$小时，

$$L_{队}{}' = \frac{\rho_1^2}{2(1-\rho_1)}\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{0.69^2}{2(1-0.69)}\left(1+\frac{1}{4}\right) = 0.75(辆)。$$

系统期望费用方程：

$$E_1 = L_{队}{}'C_{卸} + (1-\rho_1)C_{吊} = 0.75\times 0.1$$

$$+ (1-0.69)\times 2 = 0.78元/时。$$

**2.** 第二仓库服务系统($n=2$)，车辆到达强度

$$\lambda_2 = \frac{26}{24} = 1.08辆/时，$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{n\mu} = \frac{1.08}{0.65\times 2} = 0.83。$$

$$W_{队}{}^2 = \frac{\rho_2^{2+m}(l+k)}{2lu(1-\rho_2^2)[k-(1-\rho_2)\sqrt{k}]},$$

这里 $m = 2.08 - 1.08l^{-0.5} = 1$。

∴ $$W_{队}{}^2 = \frac{\rho_2^3(1+k)}{2\mu(1-\rho_2^2)[k-(1-\rho_2)\sqrt{k}]}$$

$$= \frac{0.83^3(1+4)}{2\times 0.65(1-0.83^2)[4-(1-0.83)\sqrt{4}]}$$

$= 1.93$小时

$$L_{队}{}^2 = \lambda_2 W_{队}{}^2 = 1.08\times 1.93 = 2.08(辆)。$$

$$E_2 = L_{队}{}^2 C_{卸} + (1-\rho_2)C_{吊} = 2.08\times 0.1$$

$$+ (1-0.83)\times 2\times 2 = 0.89元/时。$$

两个仓库的总费用

$$E = E_1 + E_2 = 0.78 + 0.89 = 1.67元/时。$$

现在我们考虑把两个仓库合并成一个。汽车到达流服从泊松流，其强度为

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.42 + 1.08 = 1.5辆/时。$$

这股流由三台桥吊服务(卸车)．系统的负荷为

$$\rho=\frac{\lambda}{n\mu}=\frac{1.5}{3\times0.65}=0.77.$$

这时，$m=1$，汽车平均待卸时间为

$$W_{队}=\frac{3\rho^{3+m}(l+k)}{2l\mu(1-\rho)(2+4\rho+3\rho^2)[k-(1-\rho)\sqrt{k}]}$$

$$=\frac{3\times0.77^4(1+4)}{2\times0.65(1-0.77)(2+4\times0.77+3\times0.77^2)[4-(1-0.77)\sqrt{4}]}$$

$=0.73$小时．

$L_{队}=\lambda W_{队}=1.5\times0.73=1.1$辆．

$E=1.1\times0.1+(1-0.77)3\times2=1.49$元/时．

计算表明，合并仓库的做法是正确的．因为，这样可以减少车辆待卸时间．减少的值为：

$$\frac{1.79+1.93}{2}-0.73=1.13\text{小时}.$$

或者说，每隔1.13小时可减少待卸车1辆．

减少费用的期望值为

$1.67-1.49=0.18$元/时．

但，吊车的负荷没有变化

$\rho_1+n\rho_2=0.69+0.83\times2=2.31.$

$n\rho=0.77\times3=2.31.$

因此，集中作业能改善服务系统的技术和经济指标．

在货场作业中，采用优先服务具有重要意义．优先服务分为：

(1) 绝对优先——排队规则．当具有优先服务权的顾客到达时，正在被服务的一般顾客，立即中断服务，转向为优先服务的顾客服务．当优先的顾客被服务完毕后，再为一般顾客服

务。

（2）相对优先——排队规则，当有优先服务权的顾客到达时，正在被服务的顾客，继续被服务，一旦服务完毕，立即为优先服务的顾客服务。

（3）混合优先——排队规则。当有优先服务权的顾客到达时，正在被服务的一般顾客，如果还需要服务 $t_{\text{服}}$ 时间，而 $t_{\text{服}} > \tau_{\text{标}}$，式中 $\tau_{\text{标}}$ 为有优先权的顾客的标准等待时间，则中断一般顾客的服务。或者，$t_{\text{服}} < \tau_{\text{标}}$，有优先权的顾客等待为一般顾客服务完毕。

（4）动态优先——服务的顺序不仅与顾客的优先权有关，而且与顾客允许排队的时间有关。例如，列车等待时间不能超过运行图规定的出发时间。

当货场上有汽车和火车两种输入流时，一般，汽车有绝对优先权。根据文献〔21〕，汽车的平均数为：

$$m_{\text{汽}} = \rho_{\text{汽}} + \frac{\lambda_{\text{汽}}^2 \sigma^2(t_{\text{汽}})}{2(1-\rho_{\text{汽}})}.$$

平均送车次数为：

$$m_2 = \frac{\rho_{\text{汽}} - \rho_{\text{车}}}{1-\rho_{\text{汽}}} + \frac{\lambda_{\text{车}}\lambda_{\text{汽}}\sigma^2(t_{\text{汽}}) + \lambda_{\text{车}}(t_{\text{车}})}{2(1-\rho_{\text{汽}})(1-\rho_{\text{汽}}-\rho_{\text{车}})}$$

在货场上车辆平均停留时间为：

$$t_{\text{车停}} = \frac{t_{\text{汽}}}{1-\rho_{\text{汽}}} + \frac{\lambda_{\text{汽}}\sigma^2(t_{\text{汽}}) + \lambda_{\text{车}}\sigma^2(t_{\text{车}})}{2(1-\rho_{\text{汽}})(1-\rho_{\text{汽}}-\rho_{\text{车}})}.$$

式中　$\rho_{\text{汽}}$，$\rho_{\text{车}}$——装卸机器为汽车和火车车辆服务的负荷水平；

$\lambda_{\text{汽}}$，$\lambda_{\text{车}}$——汽车和火车到达强度；

$t_{\text{汽}}$，$t_{\text{车}}$——为汽车和火车车辆服务的时间。

$\sigma^2(t_{\text{汽}})$，$\sigma^2(t_{\text{车}})$——为汽车和火车车辆服务时间的方差。

混合优先只当系统内有两种以上流到达时才能发生。系统内汽车的平均数为：

对一级优先的顾客流（汽车），

$$m_1=\frac{\lambda_{汽}\lambda_{车}}{2(1-\rho_{汽})}\int_{t_0}^{\infty}(x-t_0)^2p_{车}(x)dx+\rho_1+\frac{\lambda^2{}_{汽}\sigma^2(t_{汽})}{2(1-\rho_{汽})}.$$

对二级优先的顾客流（火车车辆），

$$m_2=-\frac{\lambda_{车}\rho_{汽}}{1-\rho_{汽}}\int_{t_0}^{\infty}(x-t_0)p_{车}(x)dx+\frac{\rho_{车}}{1-\rho_{汽}}+\frac{\lambda_{汽}\lambda_{车}}{2}\frac{\sigma^2(T_2)}{1-\lambda_2T_2}.$$

式中 $t_0$——标准等待时间；

$x$——实际时间；

$p_{车}(x)$——火车车辆服务时间的概率密度；

$T_2$——火车车辆平均服务周期。

汽车平均等待时间，

$$t_{待汽}=\frac{\lambda_{汽}\sigma^2(t_{汽})+\lambda_{车}\int_{t_0}^{\infty}(x-t_0)p_{车}(x)dx}{2(1-\rho_{汽})}.$$

火车车辆的平均等待时间，

$$t_{待车}=\frac{\lambda_{车}\sigma^2(T_2)}{2(1-\lambda_{车}T_2)}+\frac{\lambda_{汽}\sigma^2(t_{汽})}{2(1+\lambda_{汽}t_{汽})}.$$

在货场上制订合理的优先作业方案时应该通过经济比较确定。但对某些情况，选取优先服务的方法，只考虑简单的关系。

令 $C_{汽}$，$C_{车}$分别为汽车和车辆在货场上停留一小时的费用。$t_{汽}$，$t_{车}$为它们的停留时间。当单通道，服务时间为指数分布时，合理的服务顺序，可按如下条件确定：

$$\frac{C_{汽}}{t_{汽}} > \frac{C_{车}}{t_{车}}$$

当服务时间为任意分布时，还必须考虑充分条件：

$$\frac{C_{汽}\sigma^2(t_{汽})}{t_{汽}} > \frac{C_{车}}{t_{车}}.$$

在确定选用混合优先时，重要的是确定 $t_{标}$。合理的$t^*_{标}$应是期望费用最小。即

$$E(t_{标}) = C_{汽}\lambda_{汽}t_{汽停} + C_{车}\lambda_{车}t_{车停} \to \min.$$

当服务时间为指数分布时，如果

$C_{汽}/t_{汽} > C_{车}/t_{车}$，则采用绝对优先

如果 $C_{汽}/t_{汽} < C_{车}/t_{车}$，则采用相对优先。

如果 $C_{汽}/t_{汽} = C_{车}/t_{车}$，则采用优先服务没有意义。

如果服务时间为 $k$ 阶爱尔朗分布，且

$$\frac{1}{k} < C_{车}t_{汽}/C_{汽}t_{车} < 1$$

则 $\quad \dfrac{\partial E}{\partial t_{标}} = 0$，$0 \leqslant t_{标} < \infty$，$\dfrac{\partial^2 E}{\partial t_{标}^2} > 0$，有极小值。

当均匀分布时，$t_{标}^*$值可按下式确定：

$$t_{标}^* = \frac{b+a}{2} + \frac{C_{车}}{C_{汽}}t_{汽}，\text{如果}\ b-a < \frac{2C_{车}}{C_{汽}}t_{汽}$$

$$t_{标}^* = b - \frac{2C_{车}}{C_{汽}}t_{汽}，\text{如果}\ b-a > \frac{2C_{车}}{C_{汽}}t_{汽}$$

式中 $a,b$——均匀分布的两个端点值。

## §3 闭合式模型的表格计算法

我们介绍一种很有意思的计算方法。这种方法，是用很多表格确定排队模型的效率指标的，所以叫表格计算法。我们先介绍表格法的原理。然后用实例演算。

封闭式排队模型是这样的。比如：某材料厂用坦克抓斗机对 $m$ 辆汽车装河砂，运往各工地。设汽车到达河砂堆放场的间隔时间是指数分布，其强度为 $\lambda$。抓斗机装车时间是随机变数。它服从指数分布。单位时间内，抓斗机可以装车 $\mu$ 辆。试求运输系统的效率指标。

运输系统中的 $m$ 辆汽车有三种可能状态：

1）汽车处于运输过程(包括重车运砂，空车返回)；2）汽车处于排队待装过程；3）处于装车过程。

如果处于运输状态的汽车平均有 $L_{运}$ 辆，排队等待装车的平均有 $L_{队}$ 辆和正在装车的有 $L_{装}$ 辆。显然，

$$m = L_{运} + L_{队} + L_{装}.$$

汽车处于三种状态的平均时间分别用 $W_{运}$，$W_{队}$和$W_{装}$表示。显然，汽车的数量与各种状态过程的时间成比例。即

$$L_{运}:L_{队}:L_{装}:m = W_{运}:W_{队}:W_{装}:(W_{运}+W_{队}+W_{装})$$

我们引入两个比例系数：

1） 系统效率系数， $F = \dfrac{W_{运}+W_{装}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}$.

2） 系统的服务系数， $X = \dfrac{W_{装}}{W_{运}+W_{装}}$.

因为 $$\frac{L_{装}}{m} = \frac{W_{装}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}.$$

等号两边同除 $X$，得

$$\frac{L_{装}}{mx} = \frac{W_{装}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}} \cdot \frac{W_{运}+W_{装}}{W_{装}} = F.$$

所以 $L_{装} = m \times F$.

又因为 $$\frac{L_{队}}{m} = \frac{W_{队}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}},$$

所以 $$L_{队} = m\left[\frac{W_{队}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}\right].$$

但 $$F=\frac{W_{运}+W_{装}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}$$

$$=\frac{W_{运}+W_{队}+W_{装}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}-\frac{W_{队}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}$$

$$=1-\frac{W_{队}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}},$$

∴ $$\frac{W_{队}}{W_{运}+W_{队}+W_{装}}=1-F,$$

从而 $L_{队}=m(1-F)$。

同理可求得 $L_{运}=mF(1-X)$。

根据李大勒公式可求得

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda};\quad W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=W_{队}+\frac{1}{\mu}.$$

**例题9.16** 设汽车到达河砂堆放场的强度$\lambda=2$，坦克抓斗机的装车强度$\mu=6$。有4台坦克抓斗机，10辆汽车。求系统效率指标。

**解** 已知：$\lambda=2$，$\mu=6$，$n=4$，$m=10$。

系统的服务系数 $$X=\frac{W_{装}}{W_{运}+W_{装}}.$$

在排队服务过程中，服务系数也可用下式表示：

$$X=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

因而 $$X=\frac{2}{2+6}=\frac{1}{4}=0.25.$$

根据$X=0.25$，$n=4$，查限定排队表(见附录5)

得 $F=0.983$。

因此 $L_{装}=mFX=10\times0.983\times0.25=2.46$，

$L_{队}=m(1-F)=10\times(1-0.983)=0.17$，

$L_{运}=mF(1-X)=10\times0.983(1-0.25)=7.37$。

检验：$m=L_{装}+L_{队}+L_{运}=2.46+0.17+7.37=10$(辆)。

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.17}{2}=0.085(\text{时})=5.1\text{分钟}.$$

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1}{\mu}=5.1+\frac{60}{6}=15.1\text{分钟}.$$

**例题9.17** 某机务段配属10台机车。机车运行59小时后需要架修一次。架修一台机车平均需时12.5小时。试分析架修台数目与排队等待架修机车台数之间的关系。

**解** 已知：$\lambda=\frac{1}{59}=0.017$台/时。

$$\mu=\frac{1}{12.5}=0.08\text{台/时}.$$

∴ 服务系数 $X=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\frac{0.017}{0.017+0.08}=0.175$。

根据 $n=1,2,3,4$. $X=0.175$。查表(附录5)得

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $F$ | 0.564 | 0.898 | 0.980 | 0.9965 |
| $L_{队}$ | 4.36 | 1.02 | 0.2 | 0.04 |
| $\eta$ | 0.987 | 0.785 | 0.571 | 0.435 |

我们计算 $L_{队}$ 和 $\eta$ $\left(\text{抓斗机利用率 } \eta=\frac{mFx}{n}\right)$。

由表可见，当$n=1$时，架修台一直处于工作状态。排队待修机车约为配属机车的一半。

如果机车待修1小时损失10元.架修台闲置1小时损失16元。则两种损失费用方程为

$$E(n)=C_1L_{队}+C_2(1-\rho).$$

式中$C_1=12$元 $C_2=6$元。

现在求架修台闲置的概率。

架修台空闲系数：$k=\frac{\text{闲着台的平均数}}{\text{总台数}}=\frac{p_0}{n}$

而 $k=1-\frac{mFx}{n}=\frac{p_0}{n}$ $\therefore p_0=n-mFx=1-\rho$。

计算结果列于下表：

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | 0.003 | 0.215 | 0.429 | 0.565 |
| $L_{队}$ | 4.36 | 1.02 | 0.2 | 0.04 |
| $E(n)$ | 43.65 | 13.64 | 8.864 | 9.44 |

由表可见，当有 $n=3$ 个架修台时最合理。

**例题9.18** 某厂有10台机器。平均每0.5小时机器需要整备一次，每次整备平均10分钟。如果机器运转时，每小时可获毛利50元。为机器作整备的工人每小时工资 8 元。如果机器整备间隔时间和整备时间都是服从指数分布的。试证明配备 4 个工人最合理？

**解** 已知：$n=4$，$m=10$，$\lambda=2$，$\mu=6$，

$$X=\frac{2}{2+6}=0.25.$$

当 $m=10$ 时，运转机器的平均数 $L_{运}=mF(1-x)$，

或 $L_{运}=10\times F(1-0.25)=7.5F$。

所以每小时可得期望利润为$50\times 7.5F=375F$。

根据 $n=1,2,3,4,5,6.$ $x=0.25.$ 查表(附录 5 )得$F$值。并按下式计算纯利润：

$$E(n)=375F-8n,$$

计算结果列于下表：

| $n$ | $F$ | $375F$ | $8n$ | $E(n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.999 | 374.63 | 48 | 326.63 |
| 5 | 0.997 | 373.88 | 40 | 333.88 |
| 4 | 0.983 | 368.63 | 32 | 336.63 |
| 3 | 0.929 | 348.38 | 24 | 324.38 |
| 2 | 0.753 | 282.38 | 16 | 266.38 |
| 1 | 0.400 | 150.00 | 8 | 142.00 |

由表可见，当 $n=4$ 时，获利最多。

**例题9.19** 某铝厂从铁钒土矿中提炼某种铝合金原料。铁钒土系露天堆放。采用坦克抓斗机抓矿石对汽车进行装车。该厂有 6 辆载重不等的汽车把矿石运到厂内不同地点。抓斗机每台工作 1 小时需要费用 8 元(包括工人工资和机器折旧维修费用)。汽车连续运输矿石，产生有效利润18元。汽车随机到达矿石堆放场。抓斗机装车时间也是随机变数，服从指数分布。汽车按泊松流到达堆放场。已知服务系数 $X=0.3$。试问配备多少台坦克抓斗机最合理?

**解** 这是设备配套协调问题.表现为经济协调的排队问题。坦克抓斗机过多，它的大部分时间闲着。抓斗机数量过少，不能满足汽车装车的需要。汽车必须高效率地连续地拉运矿石，汽车运输矿石可以产生有效收入18元。

我们用表格计算法求解这个排队问题。

当 $m=6$，$X=0.3$，$n=4$时，查表得 $F=0.997$。

从而 $L_{装}=mFX=6\times0.997\times0.3=1.795$(辆)。

排队等待装车的汽车的平均数为

$$L_{队}=m(1-F)=6\times(1-0.997)=0.018(\text{辆})。$$

正在运输的汽车平均数为

$$L_{运}=mF(1-X)=6\times0.997\times0.7=4.18(\text{辆})。$$

4 台抓斗机的装车费用为：$8n=8\times 4=32$元/时。

这时，$L_{运}=4.18$辆。可得经济收入

$$18\times L_{运}=18\times 4.18=75.2\text{元/时}。$$

上述计算表明，采用 4 台抓斗机的经济收入为：

$$E(n)=75.2-32=43.2\text{元}。$$

如果采用4,3,2,1台抓斗机时，经济净收入列于下表。

| $n$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $F$ | 0.997 | 0.978 | 0.880 | 0.543 |
| $L_{运}$ | 4.18 | 4.11 | 3.70 | 2.28 |
| $E(n)$ | 43.2 | 50.0 | 50.6 | 33.0 |

由表可见，采用两台坦克抓斗机时，净收入为50.6。经济效果最好。

# 第十章　题解(110例)

解排队问题的一般步骤为：

(1) 确定排队问题的可能状态；

(2) 列出状态转移图；

(3) 确定顾客到达间隔时间和服务时间的概率规律；

(4) 确定顾客到达强度和服务强度；

(5) 根据系统状态转移图建立哥尔莫可尔夫方程；

(6) 求系统的极限概率和运行(效率)指标；

(7) 计算需要的最优参数。

这并不是说，解排队问题都要经过这些步骤。实际上，很多问题可按第七章的排队模型试用或按第八章模拟求解。

本章主要讨论如何应用排队模型解题。

排队服务系统的主要运行(效率)指标：

$\lambda$——顾客到达强度；

$\mu$——服务员服务强度；

$\bar{t}_{服}$——服务一个顾客的平均延续时间；

$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$——系统的负荷水平。

$L_{系}=\sum\limits_{n=0}^{m}P_n$——系统内顾客的平均数；

$L_{队}=\sum\limits_{k=n+1}^{m}(k-n)P_n$——排队顾客的平均数；

表10.1

| 指标 \ 模型 | 损失制 | | 等待制 | |
|---|---|---|---|---|
| | $M\|M\|1\|0$ | $M\|M\|n\|0$ | $M\|M\|1$ | $M\|M\|n$ |
| $P_0$ | $\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$ | $\dfrac{1}{\left[1+\dfrac{\rho}{1!}+\dfrac{\rho^2}{2!}+\cdots+\dfrac{\rho^n}{n!}\right]}$ | $1-\rho$ | $\left[1+\dfrac{\rho}{1!}+\dfrac{\rho^2}{2!}+\cdots+\dfrac{\rho^n}{n!}+\dfrac{\rho^{m+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$ |
| $P_n$ | $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ | $\dfrac{\rho^K}{k!}P_0$, $k=1,2,\cdots n$ | $\rho^n(1-\rho)$ | $\dfrac{\rho^n}{n!}P_0$, $\dfrac{\rho^{n+1}}{n^r n!}P_0$ |
| $Q$ | $P_0$ | $1-P_{损}$ | 1 | 1 |
| $A$ | $\lambda Q$ | $\lambda(1-P_{损})$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| $P_{损}$ | $1-Q$ | $P_n$ | 0 | 0 |
| $\overline{K}$ | | $\dfrac{A}{\mu}$ | $\rho$ | $\rho$ |
| $L_{服}$ | | | $\rho$ | $\rho$ |
| $L_{系}$ | | | $\dfrac{\rho}{1-\rho}$ | $L_{队}+L_{服}$ |
| $L_{队}$ | | | $\dfrac{\rho^2}{1-\rho}$ | $\dfrac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\rho}{n}\right)^2}$ |
| $W_{系}$ | | | $L_{系}/\lambda$ | $L_{系}/\lambda$ |
| $W_{队}$ | | | $L_{队}/\lambda$ | $L_{队}/\lambda$ |

| 混合制 | |
|---|---|
| $M\|M\|1\|m$ | $M\|M\|n\|m$ |
| $\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$ | $\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{(\rho/n-(\rho/m)^{m+1}}{(1-\rho/n)}\right]^{-1}$ |
| $\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$ | $\frac{\rho^n}{n!}P_0$<br>$\frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!}P_0$ |
| $1-P_{损}$ | $1-P_{损}$ |
| $\lambda Q$ | $\lambda Q$ |
| $P_{m+1}=\frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$ | $P_{n+m}=\frac{\rho^{n+m}P_0}{n^m \cdot n!}$ |
| | $\frac{A}{\mu}$ |
| $1-P_0$ | $\rho(1-P_{损})$ |
| $L_{队}+L_{服}$ | $L_{队}+L_{服}$ |
| $\frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}$ | $\frac{\rho^{n+1}P_0(1-(m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{n \cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$ |
| $L_{系}/\lambda$ | $L_{系}/\lambda$ |
| $L_{队}/\lambda$ | $L_{队}/\lambda$ |

**续表10.1**

| 模型 / 指标 | 混合制（排队时间有限） | |
|---|---|---|
| | 单通道 | 多通道 |
| $P_0$ | $[\sum \rho^n \varepsilon^{n(n-1)/2}]^{-1}$ | $\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n+\beta}+\frac{\rho^2}{(n+\beta)(n+2\beta)}+\cdots\right)\right]^{-1}$ |
| $P_n$ | $\rho^n \varepsilon^{n(n-1)/2} P_0$ | $\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^r P_0}{(n+\beta)(n+2\beta)\cdots(n+r\beta)}$ |
| $A$ | | $\lambda-\Delta L_{队}$ |
| $Q$ | | $\frac{A}{\lambda}$ |
| $\overline{K}$ | | $\frac{A}{\mu}$ |
| $L_{队}$ | $\sum(n-1)P_n$ | $\frac{\rho}{\beta}-\frac{\overline{K}}{\beta}$ |
| $L_{系}$ | $L_{队}+\rho(1-P_{损})$ | |

| 封　闭　式　服　务　系　统 | |
|---|---|
| 单　通　道 | 多　通　道 |
| $\left[1+n\rho+n(n-1)\rho^2+\cdots+n(n-1)\cdots1\cdot\rho^n\right]^{-1}$ | $\left[1+\frac{n}{1!}\rho+\frac{n(n-1)}{2!}\rho^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-m)}{m\cdot m!}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots1}{m^{n-m}\cdot m!}\rho^n\right]^{-1}$ |
| $n(n-1)\cdots1\cdot\rho^n P_0$ | $\frac{n(n-1)\cdots1}{m^{n-m}m!}\rho^n P_0$ |
| $(1-P_0)\mu$ | $\overline{K}\mu$ |
| | |
| $1-P_0$ | $\frac{A}{\mu}$ |
| $n-(1-P_0)\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$ | |
| | $n-\frac{\overline{K}}{\rho}$ |

续表10.1

| 排队模型 | 顾客平均数 | | |
|---|---|---|---|
| | 系统内顾客平均数$L_{系}$ | 负荷水平$\rho$ | 排队顾客平均数$L_{队}$ |
| | 单通道无限等待制、顾客到 | | |
| $M\mid G\mid 1$ | $\left(W_{队}+\frac{1}{\mu}\right)\lambda=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\sigma^2+\left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)}$ | $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$ | $\frac{\rho^2+\lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}=\frac{\rho^2}{(1-\rho)}\cdot\left(\frac{1+V^2}{2}\right)=\frac{\lambda^2}{2(1-\rho)}\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)$ |
| $M\mid M\mid 1$ | $\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ | $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$ | $\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ |
| $M\mid E_K\mid 1$ | $\frac{K+1}{2K}\frac{\rho}{(1-\rho)}=\frac{1+K}{2K}\left(\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)=\frac{K+1}{2K}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{2K-\rho^2(K-1)}{2K(1-\rho)}$ | $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$ | $\frac{K+1}{2K}\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{K+1}{2K}\cdot\left(\frac{\frac{\lambda^2}{\mu^2}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)=\frac{K+1}{2K}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ |
| $M\mid D\mid 1$ | $\frac{2\rho-\rho^2}{2(1-\rho)}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\frac{(2-\rho)}{2}=\frac{\lambda(2-\rho)}{2\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$ | $\frac{\lambda}{\mu}=\rho$ | $\frac{\rho^2}{(1-\rho)}\frac{1}{2}=\frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$ |

| 平均时间 | |
|---|---|
| 顾客排队平均等待时间 | 顾客在系统内停留时间 |
| $W_{队}$ | $W_{系}$ |
| 达间隔时间服从指数分布 | |
| $\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1+\frac{\sigma^2}{\bar{t}^2}}{2}\bar{t}_{服}=\frac{\rho^2+\lambda^2\sigma^2}{2\lambda(1-\rho)}=\frac{\rho^2(1+V^2)}{2(1-\rho)\lambda}=\frac{\lambda}{2(1-\rho)}\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)$ | $\frac{\sigma^2+\left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}\right)}+\frac{1}{\mu}$ |
| $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{\rho}{1-\rho}\bar{t}_{服}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ | $\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$ |
| $\frac{K+1}{2K}\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}\frac{1}{\mu}=\frac{K+1}{2K}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{K+1}{2K}\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$ | $\frac{2K-K\rho+\rho}{2K(\rho-\lambda)}=\frac{K+1}{2K}\cdot\frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{K+1}{2K}\frac{1}{\mu-\lambda}$ |
| $\frac{\rho}{1-\rho}\frac{t}{2}=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}=\frac{\lambda}{2\mu^2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$ | $\frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)}=\frac{2\mu-\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}=\frac{2-\rho}{2\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{2-\rho}{2(\mu-\lambda)}$ |

$$L_{服} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)P_k$$——正在被服务的顾客的平均数；

$$\bar{\rho} = \sum_{k=0}^{n} (n-k)P_k$$——闲着的服务员的平均数；

$$W_{队} = \frac{L_{队}}{\lambda}$$——顾客平均排队时间；

$$W_{系} = \frac{L_{系}}{\lambda}$$——顾客在系统内平均逗留时间；

$$L_{系} = \lambda W_{系} = \mu W_{队} = \lambda\left( W_{队} + \frac{1}{\mu}\right) = \lambda\ (W_{队} + \bar{t}_{服})$$

排队模型的主要计算公式汇总于表10.1.

**1**．北京地铁前门车站乘客是最简单流，每小时平均有120人乘车．试计算在一分钟内没有乘客和有一、二、三、四位乘客的概率．

**解** 按最简单流公式，

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

$\because$ $t = 1$分钟$= \frac{1}{60}$小时；$\lambda = 120$人/时．$\therefore \lambda t = 2$人．

没有乘客的概率 $P_0(t) = \frac{2^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-2} = 0.135$.

即在100个小时内平均有13.5个小时中没有乘客．车站上有一、二、三、四个乘客的概率分别为

$$P_1(t) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 0.27;\quad P_2(t) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 0.27;$$

$$P_3(t) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0.18;\ P_4(t) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} = 0.09.$$

车站上有一个以上乘客的概率为

$$P(n \geqslant 1) = 1 - P_0(t) = 1 - 0.135 = 0.865.$$

即车站上总是有乘客的概率为86.5%

2．长沙出租汽车站，每分钟平均接到三个电话，预订出租汽车．如果预订汽车电话服从泊松流．试求在二分钟内接到：($a$) 四个电话订户的概率；($b$) 少于四个订户的概率；($c$) 多于四个订户的概率。

**解** $\lambda=3$，$t=2$，$n=4$．

按泊松流公式：$P_n(t)=\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$．

($a$) $n=4$时，$P_4(2)=\dfrac{(3\times 2)^4}{4!}e^{-3\times 2}=0.135$．

($b$) $n<4$时，
$$\begin{aligned}P_{<4}(2)&=P_0(2)+P_1(2)+P_2(2)+P_3(2)\\&=e^{-6}+6e^{-6}+\frac{6^2}{2!}e^{-6}+\frac{6^3}{3!}e^{-6}\\&=e^{-6}(1+6+18+36)=0.1525．\end{aligned}$$

($c$) $n\geqslant 4$ 时，$P_{\geqslant 4}(2)=1-P_{<4}(2)=1-0.1525=0.8475$．

即在二分钟内少于四个电话的概率为0.85．因此，配备较多的出租汽车，才能满足游客的需要。

3 设货船按泊松流到达某港，平均每天到达两艘．装卸货物时间为指数分布，平均每天可装卸三条船．试问每只船在港内平均停留时间；平均有多少船在排队，等待卸货。

**解** 本题为单通道排队系统。

$\because$ $\lambda=2$，$\mu=3$，　$\therefore$　$\rho=\dfrac{2}{3}$．

每只货船平均等待卸货时间：

$$W_{队}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{2}{3(3-2)}=\frac{2}{3}\quad(天)．$$

等待卸货的船只的平均数：

$$L_{队}=\lambda W_{队}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}(艘)．$$

4 北京某超级市场，顾客按泊松流到来，平均每半小时有

6人．收款台计价收费时间为指数分布．平均为4分钟．试求该超级市场的效率指标．

**解** 已知：$\lambda=1$人/5分钟，$\frac{1}{\mu}=4$分钟/人，$\rho=\frac{4}{5}$.

收款台空闲的概率 $P_0=1-\rho=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

平均排队长度$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$（人）.

排队顾客数目的方差

$$D(L_{队})=\frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}=18\frac{14}{15}\ （人）.$$

系统内顾客平均数

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=4（人）.$$

系统内顾客数的方差

$$D(L_{系})=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}=\frac{4}{5}\times5^2=20（人）.$$

顾客平均排队时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{16}{5}\times5=16（分钟）.$$

排队时间的方差

$$D(W_{队})=\frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}=384（分钟）.$$

**5** 某机关接待室，接待人员每天工作10小时．来访人员的到来和被接待时间都是随机的．每天平均有90人到来，($\lambda=9$)．接待的平均速度为$\mu=10$人/时（平均每人6分钟）．试求排队等待接待的平均人数；等待接待的多于二人的概率；如果使等待接待的人平均为二人，接待速度应提高多少．

**解** 据题意，本题为单通道无限排队服务系统．$\lambda=9$，$\mu=10$，$\rho=0.9$．

平均排队人数： $L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{0.81}{0.1}=8.1$人。

排队人数大于2人的概率，$P_{>2}=1-P_0-P_1-P_2$。

$P_{>2}=\rho^{n+1}=0.9^3=0.729$。

为了把排队人数缩短到二人，则$\mu$应等于

$$L_{队}=\frac{\left(\frac{9}{\mu}\right)^2}{1-\frac{9}{\mu}}=2,\ 2\mu^2-18\mu-81=0.$$

$$\therefore\quad \mu=\frac{18\pm\sqrt{18^2+8\times81}}{2\times2}=12.29$$

即应提高接待速度1.229倍。

如果服务时间固定，$\mu=10$，这时平均排队人数为：

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=4.05\text{人}.$$

为了把平均排队人数压缩到二人，应提高接待速度为

$$L_{队}=\frac{\left(\frac{9}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{9}{\mu}\right)}=2,\ 4\mu^2-36\mu-81=0.$$

$$\therefore\quad \mu=\frac{36\pm\sqrt{36^2+16\times81}}{8}=10.86$$

即平均速度应提高1.086倍。

**6** 某修理店只有一个工人．每小时平均有4个顾客．该工人检查顾客的器具的损坏情况，立即修好或提出修理的意见，所需要的时间平均为6分钟．到达次数按泊松分布，服务时间是指数分布．求($a$) 修理店空闲时间的比例（此时工人可以修理留下的器具）；($b$) 店内有三个顾客的概率；($c$) 店内至少有一个顾客的概率；($d$) 平均在系统中的顾客数；($e$) 平均消耗

时间，包括被服务时间在内；(*f*) 等待服务的顾客平均人数；(*g*) 平均消耗时间，被服务时间除外；(*h*) 必须在店内消耗15分钟以上的概率。

**解** 据题意，本题是单通道排队服务系统，$\lambda=4$，$\mu=10$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{10}=0.4$。

(*a*) 店内没有顾客的概率

$P_0=1-\rho=1-0.4=0.6$，即有60%的时间，工人用于修理顾客留下的器具。

(*b*) 店内有三个顾客的概率

$$P_3=\rho^3(1-\rho)=0.4^3\times0.6=0.0384.$$

(*c*) 店内至少有一个顾客的概率. 它是店内没有顾客的对立事件. 即

$$P_1=1-P_0=1-(1-\rho)=\rho=0.4,$$

即有40%的时间，店内至少有一个顾客。

(*d*) 在修理系统内顾客的平均人数为

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.4}{0.6}=0.67\text{人}.$$

(*e*) 顾客在店内总共停留时间，包括排队等待时间和服务时间

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{0.67}{4}=0.168.$$

(*f*) 平均排队时间为

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.267}{4}=0.067\text{小时}.$$

因为到达间隔和服务时间均为指数分布，所以顾客在系统内的停留时间也是指数分布。因此，停留时间的累积分布函数

$$F(\omega/W_{系})=1-e^{-\omega/W_{系}} \text{ 或 } R(\omega/W_{系})=e^{-\omega/W_{系}}.$$

因为 $W_{系}=\frac{1}{\mu-\lambda}$，所以 $R(W_0)=e^{-(\mu-\lambda)W_0}$。

令 $W_0=15$分钟$=\frac{1}{4}$小时

$\therefore$ $R_{(\frac{1}{4})}=e^{-1(10-4)\frac{1}{4}}=e^{-1.5}=0.2231$。

即顾客在店内停留15分钟以上的概率为0.2231。

7 已知数据同上例。但服务时间是正态分布，平均时间为 6 分钟，方差$\sigma^2=\frac{1}{8}$。求排队等待的平均人数。

**解** 本题为泊松流，任意服务时间。队长为

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}\cdot\frac{1+v^2}{2},\quad \because\quad v^2=\frac{\sigma^2}{\lambda^2},$$

$$\therefore\quad L_{队}=\frac{\rho^2+\lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}=\frac{0.4^2+4^2\left(\frac{1}{8}\right)}{2(1-0.4)}=1.8人。$$

即平均有1.8人排队。

8 如果修理店内提供服务时，由一台特殊的机器对需要修理的器具进行检查，其操作周期为 6 分钟。其余数据同题(7)。求($a$) 排队等待服务的平均人数；($b$) 在店内的期望人数；($c$) 平均等待服务时间；($d$) 在店内平均停留时间。

**解** $\because$ $\lambda=4$，$\mu=10$(常数)，$\rho=0.4$。

因为机器服务时间是常数，所以这时排队等待服务的平均人数为

($a$) $L_{队}=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=\frac{0.4^2}{2\times0.6}=0.133$人。

($b$) 店内顾客平均数（排队的顾客平均数加上正在被服务的顾客数)：

$$L_{系}=L_{队}+\rho=0.133+0.4=0.533人。$$

(c) 顾客平均排队等待时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.133}{4}=0.03325\text{小时}。$$

(d) 顾客在店内平均停留时间

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{0.533}{4}=0.133\text{小时}.$$

**9** 某工具间相当紊乱，为一个工人服务需12分钟．该车间有 5 个工人，平均每隔15分钟有一个工人前来领取工具．工人到达工具间为泊松流，领取工具时间为指数分布．试求：(a) 保管员空闲的概率；(b) 5 个工人都在工具间的概率；(c) 系统内平均人数；(d) 平均排队人数；(e) 等待和服务的平均时间；(f) 平均排队时间；(g) 评价这些结果．

**解** 据题意，本系统内的人数限制为 5 人，即单通道闭合式服务系统。

$$\lambda=12,\ \mu=15,\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{12}{15}=0.8.$$

(a) 办事员空闲的概率

$$\begin{aligned}P_0&=[1+n\rho+n(n-1)\rho^2+n(n-1)(n-2)\rho^3\\&\quad+n(n-1)(n-2)(n-3)\rho^4\\&\quad+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\rho^5]^{-1}\\&=[1+5\times0.8+5\times4\times0.8^2+5\times4\times3\times0.8^3\\&\quad+5\times4\times3\times2\times0.8^4+5\times4\times3\times2\times1\times0.8^5]^{-1}\\&=0.0073.\end{aligned}$$

(b) 5 个工人都在工具间的概率

$$\begin{aligned}P_5&=n(n-1)\cdots1\rho^nP_0\\&=5\times4\times3\times2\times1\times0.8^5\times0.0073=0.287.\end{aligned}$$

(c) 系统内平均人数

$$L_{系}=n-\frac{1-P_0}{\rho}=5-\frac{1-0.0073}{0.8}=3.76人.$$

($d$) 排队的平均人数等于系统内的平均人数减去正在被服务的人数. 即

$$L_{队}=L_{系}-\rho=3.76-0.8=2.96人.$$

($e$) 工人在系统内平均停留的时间

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda},\quad \because\ \lambda=\frac{60}{15}=4人/时,$$

$$\therefore\quad W_{系}=\frac{3.76}{4}=0.94小时.$$

($f$) 工人排队等待时间

$$W_{队}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{2.96}{4}=0.74小时.$$

($g$) 由于队排得长, 等待时间久, 所以建议压缩领工具的时间和增加保管员都可以.

**10** 某理发店有两个理发员. 顾客平均到达间隔时间为20分钟. 每剃一个头需要25分钟. 两种时间均为指数分布. 试求顾客等待理发的时间.

**解** 本题为多通道排队服务系统. $n=2$, $\lambda=20$; $\mu=\frac{1}{25}$,

$$\rho=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{25}}=\frac{5}{4}=1.25.$$

平均排队等待时间可按下式计算.

$$W_{队}=\frac{1}{\lambda}\ \frac{2-\rho}{2+\rho}\ \frac{\rho^3}{(2-\rho)^2}=\frac{\rho^3}{\lambda(4-\rho^2)}$$

$$=\frac{1.25^3}{\frac{1}{20}(4-1.25^2)}=16(分钟).$$

服务系统内顾客平均数

$$L_{系}=\frac{4\rho}{4-\rho^2}=\frac{4\times 1.25}{4-1.25}=2人。$$

排队等待理发的平均人数

$$L_{队}=\frac{\rho^3}{4-\rho^2}=\frac{1.25^3}{4-1.25^2}=0.8人。$$

**11** 某修理店，每小时有12个顾客到达（泊松流分布）．每次服务时间6分钟，服从指数分布．店内有二个工人．试求：(*a*) 店内无顾客的概率；(*b*) 店内有二个以上顾客的概率；(*c*) 店内有三个顾客的概率；(*d*) 排队平均长度；(*e*) 平均等待时间；(*f*) 平均停留时间；(*g*) 店内平均顾客人数．

**解** 据题意，本题为多通道排队服务系统．$n=2$，$\lambda=12$，$\mu=\frac{60}{6}=10$，$\rho=\frac{12}{2\times 10}=0.6$。

(*a*) 店内无顾客的概率

$$P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(2-\rho)}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+1.2+\frac{1.2^2}{2}+\frac{1.2^3}{2(2-1.2)}\right]^{-1}=0.25。$$

(*b*) 店内有二个以上顾客的概率

$$P_{(>2)}=\sum_{n=2}^{\infty}P_n=\frac{n^n\rho^n}{n!(1-\rho)}P_0=\frac{2^2\times 0.6^2}{2\times 0.4}\times 0.25$$

$$=0.45。$$

(*c*) 店内有三个顾客的概率

$$P_3=\frac{n^n\left(\frac{\rho}{n}\right)^3}{n!}P_0=\frac{2^2\times 0.6^3}{2}\times 0.25=0.054。$$

(*d*) 平均排队长度，即

$$\bar{r}=L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{nn!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}=\frac{1.2^3\times0.25}{2\times2\times0.4^2}=0.675人。$$

(*e*) 平均排队时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{0.675}{12}=0.056小时=3.375分。$$

(*f*) 平均停留时间

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1}{\mu}=3.375+6=9.375分。$$

(*g*) 店内顾客的平均人数

$$L_{系}=\lambda W_{系}=\frac{12}{60}\times9.375=1.875人。$$

**12** 有二根管子的自动加油站 ($n=2$),汽车到达加油站的强度为每分钟0.8辆. 平均每次加油时间$\frac{1}{\mu}=2$分钟. 在本地区没有别的加油站. 试求加油站的效率指标。

**解** $n=2$, $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $\rho=1.6$, $\frac{\rho}{n}=0.8$

$\because$ $\frac{\rho}{n}<1$, 所以有极限概率存在。

加油站空闲的概率为

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+1.6+1.28+\frac{4.09}{2\times0.4}\right]^{-1}=0.111。$$

站上有一、二、三、四辆汽车的概率分别为

$$P_1=\frac{\rho}{1!}P_0=1.6\times0.111=0.178;$$

$$P_2=\frac{\rho}{2!}P_0=1.28\times0.111=0.142,$$

$$P_3=P_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}P_0=\frac{1.6^3}{2\times 2}\times 0.111=0.114;$$

$$P_4=P_{n+2}=\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}P_0=\frac{1.6^4}{2^2\times 2}\times 0.111=0.091.$$

占用油管的平均数等于加油站的绝对通过能力$A=\lambda=0.8$除以服务强度$\mu=0.5$，即

$$\bar{k}=\frac{A}{\mu}=\frac{0.8}{0.5}=1.6.$$

不用排队的概率，即

$$P_0+P_1+P_2=0.111+0.178+0.142=0.431.$$

平均队长，$L_{队}=\dfrac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!\left(1-\dfrac{\rho}{n}\right)^2}=\dfrac{1.6^3\times 0.111}{2\times 2\times 0.4^2}=0.71.$

站内汽车的平均数　$L_{系}=L_{队}+\rho=0.71+1.6=2.31;$

平均等待时间　$W_{队}=\dfrac{L_{队}}{\lambda}=\dfrac{0.71}{0.8}=0.89;$

平均停留时间　$W_{系}=W_{队}+\dfrac{1}{\mu}=0.89+2=2.89$(分)。

**13**　自动加油站设有两根加油管($n=2$)。每分钟平均有二辆汽车到达（$\lambda=2$）。每次加油时间平均为2分钟。加油站最多只能停三辆汽车。超过三辆不予加油。试求系统效率指标。

**解**　本题是多通道排队长度有限制的服务系统。$n=2, m=3$，$\lambda=2$，$\mu=0.5$，$\rho=4$，$\dfrac{\rho}{n}=2$。

加油站空闲的概率

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{\dfrac{\rho}{n}-\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{\rho}{n}}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+4+\frac{4^2}{2}+\frac{4^2}{2}\cdot\frac{2-2^4}{1-2}\right]^{-1}=\frac{1}{125}=0.008.$$

加油站损失的概率

$$P_{损}=P_{m+n}=P_5=\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}P_0=\frac{4^{2+3}}{2^3\cdot 2}\times 0.008$$

$$=64\times 0.008=0.512.$$

相对通过能力 $Q=1-P_{损}=0.488.$

绝对通过能力 $A=\lambda Q=2\times 0.488=0.976.$

占用油管的平均数 $\bar{k}=\frac{A}{\mu}=\frac{0.976}{0.5}=1.952.$

由此可见，两根加油管不断在使用.

平均队长 $$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!}\cdot\frac{1-(m+1)\frac{\rho}{n}+m\frac{\rho}{n}}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{4^3}{2\times 2\times 125}\cdot\frac{1-(4)\times 2^3+3\times 2^4}{(1-2)^2}$$

$$=2.18.$$

平均排队时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{2.18}{2}=1.09\ (分钟).$$

平均停留时间

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1}{\mu}=1.09+\frac{A}{\mu}=1.09+0.976$$

$$=2.07\ (分).$$

**14** 一个办事员核对登记的申请书时必须检查8张表格.核对一份申请书需1分钟. 平均每小时有6个申请人到达. 申请人到达间隔和服务时间间隔都是指数分布. 试求：(a) 办事员空闲的概率；(b) 排队等待的平均人数；(c) 系统内平均人数；(d) 排队等待的平均时间；(e) 在系统内平均停留时间.

**解** 这里有$k$张表格需要检查，检查每张表格的时间服从指数分布。平均服务时间为$\frac{1}{k\mu}$。总服务时间的平均值为$k \cdot \frac{1}{k\mu} = \frac{1}{\mu}$总服务时间的方差$\sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$（即总服务时间为$k$阶爱尔朗分布）。a）办事员空闲着的概率

$$P_0 = 1 - \rho;$$

但因 $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{\frac{60}{8}} = 0.8,$

∴ $P_0 = 1 - 0.8 = 0.2$，即有20%的空闲时间。

b）排队平均人数为

$$L_{队} = \frac{k+1}{2k} \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{8+1}{2 \times 8} \frac{0.8^2}{0.2} = 1.8(人)。$$

c）系统内平均人数为

$$L_{系} = L_{队} + \rho = 1.8 + 0.8 = 2.6\ （人）。$$

d）平均排队时间为

$$W_{队} = \frac{L_{队}}{\lambda} = \frac{1.8}{6} = 0.3\ （小时）。$$

e）顾客在系统内平均逗留时间为

$$W_{系} = \frac{L_{系}}{\lambda} = \frac{2.6}{6} = 0.43\ （小时）。$$

检验：$W_{系} = W_{队} + \frac{1}{\mu} = 0.3 + \frac{8}{60} = 0.43$（小时）。

**15** 某汽车自动加油站只有一根加油管。站内只能停留三辆汽车。每分钟平均有一辆汽车到来，$\lambda = 1$。每次加油时间平均为1.25分钟。如果汽车按泊松流到来，加油时间服从指数分布。试求加油站的效率指标。

**解** ∵ $\lambda = 1$，$\mu = \frac{1}{1.25} = 0.8$。∴$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.25$。

$m=3$。所以本题是单通道排队长度有限服务系统. 加油站空闲的概率为

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}=\frac{1-1.25}{1-1.25^5}=0.122.$$

加油站有1、2、3、4. 辆汽车的概率为

$P_1=\rho P_0=1.25\times0.122=1.52$; $P_2=\rho^2P_0=0.191$;

$P_3=\rho^3P_0=0.238$; $P_4=\rho^4P_0=0.297$.

损失概率为 $P_{损}=P_4=0.297$.

相对通过能力 $Q=1-P_{损}=0.703$.

绝对通过能力 $A=\lambda Q=0.703$.

排队汽车的平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^2[1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}$$

$$=\frac{1.25^2[1-1.25^3(3+1-3\times1.25)]}{(1-1.25)(1-1.25^3)}$$

$=1.56$ (辆).

正在加油的汽车的平均辆数

$$\bar{\omega}=\frac{\rho-\rho^{m+2}}{1-\rho^{m+2}}=\frac{1.25-1.25^5}{1-1.25^5}=0.88.$$

加油站内汽车的平均辆数

$$L_{系}=L_{队}+\bar{\omega}=1.56+0.88=2.44.$$

排队等待加油时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{1.56}{1}=1.56(分).$$

汽车在加油站内平均停留时间

$$W_{系}=W_{队}+\frac{Q}{\mu}=1.56+0.88=2.44(分).$$

**16** 某种试验用机器的固定操作周期为6分钟,机器的数量

为三台。每小时平均有21人按泊松流到来，请求试验。试求平均排队时间。

**解** 本题为多通道排队系统。固定服务时间。因此，它的效率指标是指数服务时间的一半。我们先用泊松流，指数服务时间求解。

排队等待平均时间

$$W_{队}=P(W>0)\cdot \bar{t}_{待}.$$

式中 $P(W>0)$—等待的概率，

$\bar{t}_{待}$—顾客平均等待时间，

$$\bar{t}_{待}=\frac{1}{m\mu-\lambda}=\frac{1}{3\times 10-21}=\frac{1}{9},$$

$$\therefore \quad P(W>0)=\frac{\rho^m}{(m-1)!}\cdot\frac{P_0}{m-\rho}=0.4918.$$

故 $W_{队}=0.4918\times\frac{1}{9}=0.054.$

因此 本题的解为$\frac{1}{2}W_{队}=0.027$（小时）。

**17** 某大型露天矿山，矿车按泊松流到达，平均每小时到15辆。卸车时间为指数分布。平均卸车时间3分钟.每辆矿车的售价是8万元,建设第二个卸位的投资是14万元。试问建立多少个矿山卸位最为适宜？

**解** $\lambda=15$辆/时；$\mu=20$辆/时。

一个卸位时的负荷 $\rho_1=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{15}{20}=0.75.$

系统内矿车的平均数 $L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.75}{0.25}=3$（辆）。

两个卸位时，卸位的负荷 $\rho_2=\frac{1}{2}\rho_1=\frac{0.75}{2}=0.375.$

卸位空闲的概率： $P_0=\left[\sum_{n=0}^{n-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{(n-1)!(n-\rho)}\right]^{-1}$，

或 $$P_0=\left[\sum_{n=0}^{n=1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{n\mu}{n\mu-\lambda}\right]^{-1}$$

$$\left(\rho=\frac{\lambda}{n\mu}<1\right),$$

即 $$P_0=\left[1+0.75+\frac{1}{2!}0.75^2\ \frac{2\times20}{2\times20-15}\right]^{-1}=0.45.$$

∴系统内矿车的平均数为

$$L_{系}=L_{队}+\rho=\frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}P_0+\rho,$$

即 $$L_{系}=\frac{0.75^3}{(2-0.75)^2}\times0.45+0.75=0.87.$$

因此，建造两个卸位可缩小系统内的矿车数为$3-0.87=2.13$。即平均可增加2.13辆车执行运矿石的任务，相当于14万元的投资换回$2.13\times8=17.04$万元的运输设备。因此，建造两个卸位是值得的。如果这2.13辆矿车仍用于运矿，会增大矿车到达强度。因此，实际换回的车辆数应小于2.13。

**18** 某大工厂考虑安装磨刀具用的打磨机，有两种方案可供选择：(1) 安装两台$A$型打磨机。每台平均打磨时间为10分钟；(2) 安装一台$B$型打磨机。平均打磨时间为5分钟。设打磨时间均服从指数分布。如果要求磨工具的工人，按泊松流到达，平均每小时4.5人。试问哪个方案最为有利？

**解** (1) 安装两台$A$型打磨机。这时，$\lambda=4.5$人/时

$\mu=6$人/时 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{4.5}{6.0}=0.75$。

$n=2$ $P_0=\dfrac{2-\rho}{2+\rho}=\dfrac{2-0.75}{2+0.75}=\dfrac{1.25}{2.75}=0.45$。

工人在系统内平均停留时间：

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1}{\mu}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{(n-1)!(n-\rho)^2}+\frac{1}{\mu}$$

$$=\frac{0.75^3\times0.45}{(2-0.75)^2}+\frac{1}{6}=0.28\text{（小时）}.$$

（2）安装一台$B$型机．这时工人在打磨系统内平均停留时间为

$$W_{系}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{0.75}{4.5\times0.25}=0.66\text{（小时）}.$$

因此，就工人平均非生产时间而论，安装A型机为好．

**19** 某风景区准备建造旅馆．游客平均逗留2天，逗留时间是随机变数，服从指数分布．游客到达是泊松流，平均每天有六个游客到达．如果旅馆只有8个床位．试求床位的平均使用率及旅馆满员的概率．

**解** 据题意，把旅馆的床位看作服务员，床位有空，接待游客住宿；客满时，不再接待其它游客．因而本题是多通道损失制系统．

今已知：$\lambda=6$，$\mu=\frac{1}{2}$，　$\therefore$　$\rho=12$．

床位都空着的概率

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}.$$

有$n$个游客的概率

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0.$$

当$n=8$时的概率即为满员的概率．

占用床位的平均数

$$\bar{K}=L_{系}=\sum_{n=1}^{m}nP_n=\sum_{n=1}^{m}\frac{\rho^n}{(n-1)!}P_0=\rho P_0\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!}$$

$$=P_0\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{\rho^n}{n!}-\frac{\rho^m}{m!}\right)=\rho P_0\left(\frac{1}{P_0}-\frac{\rho^m}{m!}\right)$$

$$=\rho\left(1-\frac{\rho^m}{m!}P_0\right).$$

或 $L_{系}=\rho(1-P_{损})$;

把计算过程及其结果列于下表

| $n$ | $\rho^n$ | $n!$ | $\frac{\rho^n}{n!}$ | $\sum_{n=0}^{m}\frac{\rho^n}{n!}$ | $P_n$ | $L_{系}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 12 | 1 | 12 | 13 | 0.923 | 0.9228 |
| 2 | 144 | 2 | 72 | 85 | 0.847 | 1.8348 |
| 3 | 1728 | 6 | 288 | 373 | 0.772 | 2.7348 |
| 4 | 20736 | 24 | 864 | 1237 | 0.698 | 3.6180 |
| 5 | 248832 | 120 | 2073.6 | 3310.6 | 0.652 | 4.4832 |
| 6 | 2585984 | 720 | 4147.2 | 7457.8 | 0.556 | 5.3268 |
| 7 | 35831808 | 5040 | 7109.5 | 14567.3 | 0.488 | 6.1440 |
| 8 | 429981096 | 40320 | 10664.2 | 25231.5 | 0.423 | 6.3276 |

**表中$P_n$表示:**

当$n=1$时，旅馆只有1个床位，满员概率0.92；当$n=5$时，旅馆有5个床位，满员概率0.63；$n=8$时，旅馆有8个床位，满员的概率0.42。

**表中$L_{系}$表示:**

当$n=1$时，旅馆有一个床位，每天占用床位的平均数为0.93。$n=5$，旅馆有五个床位。每天床位平均占用数为4.48个。当$n=8$时，旅馆有8个床位时，每天平均有一个床位是空着的。

**20** 某电话站单位时间内，呼唤的次数随时间而变。其变化规律用下式表示

$$\lambda(t)=20-0.1\times(t-12)^2\text{次/时。}$$

试计算自17点到17点10分，至少有两个人来打电话的概率。

**解** 至少有两人来打电话的概率的对立事件是最多有一个人打电话的概率，即

$$P_2 = 1-(P_0+P_1).$$

现在我们计算从17点到 17 点 10 分时间内打电话的平均人数。

$$\lambda = \int_{17}^{17\frac{1}{6}} \lambda(t)dt = 20\times\frac{1}{6} - 0.1\times\frac{(t-12)^3}{3}\Big|_{17}^{17\frac{1}{6}}$$

$$=2.91.$$

从而可得$P_0 = e^{-2.91} = 0.054$,

$$P_1 = \frac{2.91}{1!}e^{-2.91} = 0.157.$$

至少有两人来打电话的概率为：

$$P_2 = 1-(0.054+0.157) = 0.789.$$

**21** 某电话总机有$n$条线路，同时可供$n$对用户通话。已知每分钟有2个用户呼叫，即$\lambda=2$。平均通话时间$\bar{t}_{服} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$分钟，即$\mu=2$。试问打不通电话的概率不大于0.01，应敷多少条线路。

**解** 打不通电话的概率可以看作损失的概率。

$$P_{损} = P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}} \leqslant 0.01.$$

$\because$ $\lambda=2$，$\mu=2$，$\therefore \rho = \frac{2}{2} = 1$.

令 $n=4$，$P_{损} = \dfrac{\frac{1}{4!}}{\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+\frac{1^3}{4!}\right)}$

$$=\frac{\frac{1}{24}}{2.708}=0.015>0.01;$$

$n=5,\qquad P_{损}=0.003<0.01.$

因此，总机须装5条线．再看线路的利用率．为此，先计算占用线路的平均数：

$$\bar{K}=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda Q}{\mu}=\frac{\lambda(1-P_{损})}{\mu}.$$

当采用$n=5$时，$P_{损}=0.003$，$\therefore\ \bar{K}=\frac{2(1-0.003)}{2}=0.997$.

即利用率为 $\frac{\bar{K}}{5}=\frac{0.997}{5}=0.200$．这表示约有20%的时间在通话．若减少一条线路．即$n=4$．

$$\bar{K}=\frac{\lambda(1-P_{损})}{\mu}=1-0.015=0.985,$$

∴线路利用率 $\frac{\bar{K}}{n}=\frac{0.985}{4}=0.246$，即提高4.6%．

**22** 某电话总机有三条中继线，$m=3$，每小时平均有60次呼唤，$\lambda=60$．平均通话时间$t=2$分钟．求极限概率和运行指标．

**解** 据题意，本题为多通道损失制服务系统．$\lambda=60$，$\mu=\frac{60}{2}=30$，电话总机负荷$\rho=\frac{60}{30}=2$．

电话总机空闲的概率

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\right]^{-1}=\left[1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3\times 2}\right]^{-1}$$

$$=\left[\frac{19}{3}\right]^{-1}=0.158.$$

有一次呼唤的概率

$$P_1=\rho P_0=2\times0.158=0.316.$$

有二次呼唤的概率

$$P_2=\frac{\rho^2P_0}{2!}=\frac{2^2}{2}\times0.158=0.316.$$

有三次呼唤的概率

$$P_3=\frac{\rho^3P_0}{3!}=\frac{2^3}{3\times2}\times0.158=0.21.$$

用于检验

$$\sum P_0+P_1+P_2+P_3$$
$$=0.158+0.316+0.316+0.21=1.$$

$P_3=0.21$ 表示有21%的时间内，三条中继线被占用着，后到的呼唤就不能接通，因而造成损失．系统损失的概率 $P_{损}=P_3=0.21$.

同时通话的平均呼唤次数为

$$L_{系}=\sum_{n=1}^{m}nP_n=\sum_{n=1}^{m}\frac{\rho^n}{(n-1)!}P_0=\rho P_0\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!}$$
$$=P_0\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{\rho^n}{n!}-\frac{\rho^m}{m!}\right)$$
$$=\rho P_0\left(\frac{1}{P_0}-\frac{\rho^m}{m!}\right)=\rho\left(1-\frac{\rho^m}{m!}P_0\right)$$
$$=2\left(1-\frac{2^3}{3\times2}\times0.158\right)=2(1-0.21)=1.58.$$

这时，每条中继线的负荷为：$\eta=\frac{1.58}{3}=0.53$.

由此可见，虽然中继线的利用率不高，但损失的次数已达21%.

如果减少一条中继线即 $m=2$，这时计算可得：$P_0=0.2$；$P_1=0.4$；$P_2=P_{损}=0.4$. 总机负荷：

$$L_{系}=0.4+0.8=1.2;\quad\eta=\frac{1.2}{2}=0.6.$$

如果增加一条中继线，即$m=4$，这时计算可得：$P_0=\frac{1}{7}$；$P_1=\frac{2}{7}$；$P_2=\frac{2}{7}$；$P_3=\frac{4}{21}$；$P_4=P_{损}=\frac{2}{21}=0.095$。即只损失10%的呼唤。总机负荷：

$$L_{系}=2(1-0.095)=1.81,\ \eta=\frac{1.81}{4}=0.453\text{或}45\%.$$

在表中列入损失的概率$P_{损}$和占用中继线的负荷，并列出在呼唤密集的4小时内损失呼唤的次数和接通电话的次数。

| $m$ | $P_{损}$ | $\eta$ | $N=4\times 60$ | $N(1-P_{损})$ | $N_{损}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.667 | 0.667 | 240 | 80 | 160 |
| 2 | 0.400 | 0.600 | 240 | 144 | 96 |
| 3 | 0.210 | 0.527 | 240 | 190 | 50 |
| 4 | 0.095 | 0.453 | 240 | 217 | 23 |

**23** 设车站配线—货物仓库为二相管理系统。在仓库中集结货物。货物由卡车运来，其强度为$\mu_1$，装车强度为$\lambda_1$。然后以$\mu_2=\lambda_1$的强度的重车送到车站线路上，列车编成和列车发出的强度为$\lambda_2$。

现在我们讨论货物车辆作业费用。如果货车作业过程都是泊松过程，则仓库的负荷

$$\rho_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1}.$$

线路负荷$\rho_2=\frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

$\because\qquad \mu_2=\lambda_1,$

$\therefore\qquad \rho_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$

在仓库和线路上没有储备的概率为

$$P_{00}=(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

在仓库内有$y_1$车而在线路上没有车辆的概率为

$$P_{y,0}=\rho_1^{y_1}(1-\rho_1)(1-\rho_2);$$

在线路上有$y_2$车储备，而在仓库内没有车的概率为

$$P_{0,y_2}=\rho_2^{y_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2).$$

在仓库内的平均车辆数

$$y_1=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}.$$

在线路上的平均车数.

货物存贮费（在仓库内）

$$C_{存}y_1T=\frac{TC_{存}\rho_1}{1-\rho_1}.$$

车辆停闲费用为

$$C_{车}N(p_{0,0}+p_{0,y_2})=C_{车}N[(1-\rho_1)(1-\rho_2)+\rho_2^{y_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2)];$$

装卸机器闲置费用为

$$TC_{机}Z(p_{0,0}+p_{0,y_2})=TC_{机}Z[(1-\rho_1)(1-\rho_2)+\rho_2^{y_2}(1-\rho_1)(1-\rho_2)].$$

车辆在线路上的停闲费用为

$$TC_{车}y_2=TC_{车}\frac{\rho_2}{1-\rho_2}.$$

在线路上没有车辆造成编组车列和列车出发延误的损失，其近似值为

$$TC_{车}n_1(p_{0,0}+p_{0,y_2})=TC_{车}n_1[(1-\rho_1)(1-\rho_2)+\rho_1^{y_1}(1-\rho_1)(1-\rho_2)].$$

式中　$n_1$—延误编组或发出的车辆数. 因而，费用函数方程为：

$$E(\rho_1, \rho_2)=\frac{C_{存}\rho_1 T}{1-\rho_1}+C_{车}\frac{\rho_2 T}{1-\rho_2}$$

$$+(1-\rho_1)(1-\rho_2)[(C_{车}N+TZC_{机})$$

$$(1+\rho_2^{\frac{\rho_2}{1-\rho_2}})+n_1 TC_{车}(1+\rho_1^{\frac{\rho_1}{1-\rho_1}})].$$

$0\leqslant\rho_1<1$； $0\leqslant\rho_2<1$.

为了求合理的$\rho_1^*$和$\rho_2^*$可用非线性规划方法．根据$\rho_1^*$和$\rho_2^*$求$y_1^*$和$y_2^*$.

**24** 某工厂有$n$个半成品或原料仓库．每个仓都配备装卸机械．卡车或火车车辆是运输工具．如果运输工具是同一类型的．它们到达仓库的间隔时间为指数分布．如果仓库中没有库存量，对运输工具说，服务设备“不空”．当仓库中有库存量时，则叫“空着”，即立即装车．装车的规则：先到先装．

假有有$n$个仓库，每个仓库具有相同的能力．系统的负荷水平为

$$\rho=\frac{\lambda}{n\mu}.$$

式中　$\mu$—每个仓库的服务强度；

$n\mu$—系统的服务强度．或者说，当$n$个仓库中都有库存量时，单位时间内的装车数．

这是多通道排队服务系统．

根据第六章§6．系统空闲的概率为

$$P_0=\left[\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}$$

当到达的顾客数$r<n$时，系统内有$n$个顾客的概率为

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0.$$

当$r\geqslant n$时，系统内有$n+r$个顾客的概率为

$$P_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r n!}P_0$$

排队顾客的平均数为

$$L_{\text{队}}=\sum_{r=n+1}^{\infty}(r-n)P_{n+r}=\frac{\rho^{n+1}\rho_0}{n\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}.$$

当$\rho=0.1\sim0.9$；$n=1\sim5$时的$P_0$值列于下表。

| $n$ | $\rho$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| 1 | 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 |
| 2 | 8182 | 6667 | 5385 | 4286 | 3333 | 2500 | 1765 | 1111 | 0525 |
| 3 | 7407 | 5479 | 4034 | 2941 | 2105 | 1460 | 098 | 0562 | 0249 |
| 4 | 6703 | 4491 | 3002 | 1903 | 1304 | 0880 | 0502 | 0273 | 0112 |
| 5 | 0.6065 | 0.3678 | 0.2228 | 0.1343 | 0.0801 | 0.0456 | 0.0250 | 0.0130 | 0.0050 |

顾客排队等待时间

$$W_{\text{队}}=\frac{L_{\text{队}}}{\lambda}.$$

系统内顾客平均数

$$L_{\text{系}}=L_{\text{队}}+\rho.$$

顾客在系统内，逗留时间为

$$W_{\text{系}}=\frac{L_{\text{系}}}{\lambda}.$$

为了计算方便下表中列出$n=2，3，4$时的$P_0$，$W_{\text{队}}$和$L_{\text{队}}$的计算公式。

| $n$ | $P_0$ | $W_{\text{队}}$ | $L_{\text{队}}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1-\rho}{1+\rho}$ | $\frac{\rho^2}{\mu(1-\rho)^2}$ | $\frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$ |
| 3 | $\frac{2(1-\rho)}{2+4\rho+3\rho^2}$ | $\frac{3\rho^3}{\mu(1-\rho)(2+4\rho+3\rho^2)}$ | $\frac{9\rho^4}{(1-\rho)(2+4\rho+3\rho^2)}$ |
| 4 | $\frac{3(1-\rho)}{3+9\rho+12\rho^2+8\rho^3}$ | $\frac{8\rho^4}{\mu(1-\rho)(3+9\rho+12\rho^2+8\rho^3)}$ | $\frac{32\rho^5}{(1-\rho)(3+9\rho+12\rho^2+8\rho^3)}$ |

**25** 设运输工具到达服从泊松流，其强度为$n=20$辆/时，装车时间服从指数分布，其强度为$\mu=25$辆/时。试分析单通道和多通道的效率指标。

**解** 单通道时，排队顾客平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{0.8^2}{0.2}=3.2\text{辆}.$$

如果同样的流来到具有四台装车机械的服务系统，它们总共的装车强度为$\mu=25$辆/时，则

$$L_{队}=\frac{32\rho^5}{(1-\rho)(3+9\rho+12\rho^2+8\rho^3)}$$
$$=\frac{32\times0.8^5}{(1-0.8)(3+9\times0.8+12\times0.8^2+8\times0.8^3)}$$
$$=2.39\text{辆}.$$

计算表明后者待装车数平均减少25%。

**26** 设顾客到达流为泊松流，有几台装车机械，具有相同的能力$\mu=10$辆/时，顾客到达（运输工具）强度$\lambda=20$辆/时，求合理的装车机台数

**解** $\lambda=20\quad\mu=10\quad\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{20}{10}=2.$

为了保证作业的平稳性 $\rho$必须小于1。即系统内至少有 3 台装车机械。

当$n=3$时，$\rho=\frac{20}{3\times10}=0.66$，

$n=4$时，$\rho=\frac{20}{4\times10}=0.50$，

$n=5$时 $\rho=\frac{20}{5\times10}=0.40$。

配备合理装车机械数目的期望费用方程为

$$E=L_{队}C_{装}+(1-\rho)nc_{机}.$$

当$c_{装}=1$元/时，$c_{机}=3$元/时。$n=3$ $\rho=0.66$ $p_0=0.12$

$$L_{队}=\frac{3^3\times0.66^4}{3\times0.33^2}\times0.12=0.935.$$

$$E=0.935\times1+3\times0.33\times3=3.93\text{元}.$$

当$n=4$，$\rho=0.5$ $p_0=0.13$，

$$L_{队}=\frac{4^4\times0.5^5\times0.13}{4\times0.5^2}=0.174.$$

$$E=0.174\times1+3\times0.5\times4=6.17.$$

没有必要往后计算，因为$E$值越来越大。即本系统内应配备三台装车机械最合理。

可以看到，当系统内配备$n$个服务设备，且具有不同的服务强度时：$\mu_1$，$\mu_2$，…，$\mu_n$。系统的负荷为

$$\rho=\frac{\lambda}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}.$$

令 系统内有两个服务员，它们的能力分别为$\mu_1$和$\mu_2$，且$\mu_1>\mu_2$，把$\frac{\mu_2}{\mu_1}=r$.

当运输工具到达服务系统时，两台装车机械都空着，则可以有任何一台给予装车。

令 $p$—为运输工具由第一台装车机械装车的概率。则第二台装车的概率为$1-p$。系统的负荷为

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}.$$

这时，系统内顾客平均数，[XI]建议按下式计算

$$L_{系}=\frac{\rho(1+r)[1+(1+r)\rho-(1-r)p]}{r(1+2\rho)+\rho[1+(1+r^2)\rho-(1-r^2)\rho]}.$$

文献[10]指出，如果$n>2$，而服务能力之差不超过20～30%，则每个服务设备的服务强度可按下式计算：

$$\rho_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{n}.$$

**27** 某工厂平均每天有一台机器发生故障，需要修理。机器故障流为最简单流。修理一台机器平均花费20元。现有技术水平不同的两种工人：$A$和$B$。$A$种工人每天能修复1.2台机器，每天工资3.0元，$B$种工人每天能修复1.5台，每天工资5.0元。两种工人修理机器的时间均为指数分布。试问工厂使用哪种工人合理？

**解** 工厂损失的费用为

$$E=Nc_1+c_2.$$

式中，$N$—每天发生故障机器的台数；

$c_1$—修理一台机器的费用；

$c_2$—工人的工资。

发生故障机器的台数，包括等待修理的和正在修理的。即修理系统内的机器台数$L_{系}$。

据题意，本题只考虑配备$A$种或$B$种工人，所以属单通道服务系统。若配备$A$种工人，则流的强度为$\lambda=1$，服务强度$\mu_A=1.2$。$A$种工人的负荷为$\rho_A=\dfrac{\lambda}{\mu_A}=\dfrac{1}{1.2}=0.83$。修理系统内有故障机器的数目$L^A{}_{系}=\dfrac{\rho_A}{1-\rho_A}=\dfrac{0.83}{0.17}=5$台。

工厂每天损失的费用

$$E_A=5\times20+3.0=103\text{元}.$$

如果工厂使用$B$种工人，则$\lambda=1$，$\mu_B=1.5$

$$\rho_B=\frac{\lambda}{\mu_B}=\frac{1}{1.5}=0.67.$$

修理系统内，有故障机器的台数为.

$$L^{B}{}_{系}=\frac{\rho_B}{1-\rho_B}=\frac{0.67}{0.33}=2台。$$

工厂损失：$E_B=2\times 20+5=45$元。

因此，工厂使用$B$种工人，可以减少开支：$103-45=58$元。

如果工厂使用两个$A$种工人，本题为多通道排队服务系统。系统内有故障机器的台数为：

$$L_{系}=L_{队}+\rho \quad 而L_{队}=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n\cdot n!(1-\rho/n)^2}。$$

$$p_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot(n-\rho)}\right]^{-1}。$$

今 $\lambda=1$，$\mu_{2A}=1.2$，$n=2$，$\rho=0.83$。

$$p_0=\left[1+0.83+\frac{0.83^2}{1\times 2}+\frac{0.83^3}{2(2-0.83)}\right]^{-1}=0.41。$$

$$L_{队}=\frac{0.83^3\times 0.41}{2\times 2(1-0.415)^2}=0.174.$$

$$L_{队}=0.174+0.83=1.004台。$$

工厂每天的损失费用为：$E_{2A}=1.004\times 20+2\times 3.0=26.08$元。

因此，工厂使用两个$A$种工人更为有利。

**28** 某修理工厂，每天平均有两台机器到来，请求修理。一个工人修理一台机器平均需要三小时，如果机器到达流服从最简单流，修理时间为指数分布。试问修理一台机器总共需要多少时间(只考虑机器在修理工厂内的时间)。工人每天有多少空闲时间？

**解** 平均每小时请求修理的机器数目为：

$$\lambda=\frac{2}{8}=0.25 \text{（每天按8小时计算）}$$

平均每小时修复的机器数为：

$$\mu=\frac{1}{3}=0.33。$$

工人负荷水平

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{0.25}{0.33}=0.75.$$

机器在厂内总共需要的时间包括等待修理时间和修理时间。

等待修理时间为：

$$W_{队}=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}=\frac{0.75^2}{0.25\times0.25}=9\text{小时}.$$

修理机器平均时间为$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{0.33}=3$小时，

所以，总共需要时间为

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1}{\mu}=9+3=12\text{小时}.$$

工人每天有空闲时间为

$$p_0=1-\rho=1-0.75=0.25.$$

若每天按8小时计，则工人有空时间为

$$8p_0=8\times0.25=2\text{小时}.$$

**29** 某医院有一台心电图机。院领导考虑是否增加一台，或增加病人等候坐位。作决策前，先分析目前情况。

据长期观察，病人按最简单流到来，平均每小时到达5人。每个病人占用机器的时间为指数分布，平均为10分钟。即

$$\lambda=5,\mu=\frac{60}{10}=6,\quad \rho=\frac{5}{6}.$$

在心电图室内，平均有病人

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}=5\text{人}.$$

在心电图室内，排队候诊的病人有

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{1}{6}}=4.17人。$$

心电图机器闲置不用的概率，即病人不用排队候诊的概率

$$p_0=1-\rho=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}=16.7\%。$$

病人需要等待的概率为$1-16.7\%=83.3\%$，如果认为此值太大，则应增加心电图机器。

如果心电图室目前只有四个坐位可供病人休息。当病人到来时，坐位不空，则病人站着。其概率为

$$p(n\geqslant5)=\rho^5=0.402。$$

即有40%的病人站着候诊。如嫌其值太大，则应增加坐位数目。

**30** 工厂医务室每小时平均有四个病人。医生每小时平均可诊五个病人。病人到达医务室的间隔时间和医生诊病时间都是指数分布。试分析医务室的工作。

据题意医务室内配有一个医生，故属单通道排队服务系统。

$\lambda=4$，$\mu=5$，$\rho=\frac{4}{5}=0.8$。

医务室内平均有病人

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{0.8}{0.2}=4人。$$

在医务室内，排队候诊的病人有

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{0.64}{0.2}=3.2人。$$

看病一次需要的时间（不包括从家里到医务室往、返走行时间）

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{4}{4}=1小时。$$

排队看病的平均时间

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{3.2}{4}=0.8\text{小时。}$$

医生空闲的概率：$p_0=1-\rho=1-0.8=0.2$，即20%。

在医务室内有三个以上病人的概率

$$p(n>3)=\rho^{3+1}=0.8^4=0.4096\text{。即}41\%\text{。}$$

如果工厂24小时开工，则每昼夜平均有病人$24\times4=96$人。病人每天看病的时间为$96\times0.8=76.8$小时。若病人看病一小时，工厂损失30元。这样，因看病，每天损失$30\times76.8=2304$元。若提高看病速度，例如，医生每小时诊病平均六人，则医务室内病人的平均数为

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=2\text{人。即由原来的4人减到2人。}$$

排队候诊的平均人数为

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=1.33\text{人。}$$

病人在医务室内停留时间为

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{2}{4}=0.5\text{小时。}$$

病人候诊的平均时间为

$$W_{队}=\frac{L_{队}}{\lambda}=\frac{1.33}{4}=0.33\text{小时。}$$

这样，工厂每天的损失费用为

$$96\times0.5\times30=1440\text{元。}$$

因而，工厂每天减少损失2304—1440＝864元。

此外，医务室内有超过三个病人的概率为：

$\rho^4=\left(\frac{4}{6}\right)^4=0.1975$。即20%。这样，医务室内也不那么拥挤了。

31　某诊疗室平均每隔20分钟有一个病人到来。医生诊断一个病人平均需要15分钟，两种时间均按指数分布。为满足99%的候诊病人有座位，应设置若干个座位？

**解**　据题意，本题为单通道排队系统。但排队位置有限。

$\because\quad \lambda=\frac{1}{20},\mu=\frac{1}{15}\qquad \therefore \rho=\frac{15}{20}=0.75$。

设候诊室有$m$个位置，即候诊室内有$m$个病人的概率为99%。即

$$\sum_{n=0}^{m}p_n=(1-\rho)\sum_{n=0}^{m}\rho^n=(1-\rho)\frac{1-\rho^{m+1}}{(1-\rho)}$$
$$=1-\rho^{m+1}=0.99。$$

或　　$\rho^{m+1}=0.01$

两边取对数，得

$$(m+1)\log\rho=\log 0.01$$

$$m=\frac{\log 0.01}{\log\rho}-1=15$$

即在候诊室应设置15个座位。才能满足所要条件。

32　某服务机构只有一个服务员。平均每小时有三个顾客到来。接待一个顾客可得16元。其成本为$4\mu$元。若顾客到达间隔时间和服务时间都是指数分布。试问服务能力$\mu$多大时，收入最多？

**解**　本题为单通道损失制服务系统。服务机构每小时的净收入为

$$E=N\cdot p_0c_1-c_2。$$

式中　$N$—被服务的顾客数；

$p_0$—顾客立即得到服务的概率；

$$p_0=\frac{1}{1+\rho}.$$

$\rho$—服务员的负荷；

$c_1$—接待一个顾客的收入；

$c_2$—服务一个顾客的成本。

按单通道损失制系统，$p_0=\frac{1}{1+\rho}$. $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{\mu}$,

$$\therefore \quad E=\frac{3\times 16}{1+\rho}-\frac{3\times 4\mu}{\mu\rho}=\frac{48}{1+\rho}-\frac{12}{\rho}=12\left[\frac{4}{1+\rho}-\frac{1}{\rho}\right].$$

为了求合理的$\mu$，对$E$进行一次微分并使之等于零。即

$\frac{dE}{d\rho}=12\left[\frac{-4}{(1+\rho)^2}+\frac{1}{\rho^2}\right]=0$，解之得，$\mu=3$时，收入最大。

33　某售票处有四个售票窗口.在10分钟内平均有3.6人来买票。到达间隔为指数分布。售票员在10分钟内能够发售5张客票。售票时间也是指数分布。试求没有人买票的概率；有一、二、三、四个人排队买票的概率？

**解**　本题为多通道无限排队服务系统。

$\lambda=3.6$，$\mu=5$，$\therefore \quad \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3.6}{5}=0.72$.

没有人买票的概率$p_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho}{4!(4-\rho)}\right]^{-1}$

$$=\left[1+0.72+\frac{0.72^2}{2}+\frac{0.72^3}{3\times 2}+\frac{0.72^4}{4\times 3\times 2}+\frac{0.72^5}{4\times 3\times 2(4-0.72)}\right]^{-1}$$

$$=[1+0.72+0.259+0.062+0.011+0.0024]^{-1}$$

$$=\frac{1}{2.05}=0.4878.$$

有一、二、三、四个人买票的概率分别为

$$p_1=0.72\times 0.4878=0.3512;$$

$$p_2=\frac{0.72^2}{2}\times 0.4878=0.126;$$

$$p_3=\frac{0.72^3}{3\times 2}\times 0.4878=0.030;$$

$$p_4=\frac{0.72^4}{4\times 3\times 2}\times 0.4878=0.00546.$$

**34** 在高架线上卸石渣。二台卸车机的生产能力都是60吨/时。整天（24小时）有自卸卡车到达料库，卡车载货8吨。实际工作时间一天按20小时计算.料库中货物作业量,每昼夜600，1000，1800，2000吨不等，这些货物分别相当于75，125，225，250辆自卸卡车每昼夜的运量。火车车辆到达流为最简单流，货物作业时间（服务时间）为任意分布。其偏离系数 $v=0.5$；服务系统可以看作单通道系统。把二台卸车机看作有相同负荷水平的两个单通道系统。

求效率指标。

卸卡车平均时间 $\tau_{汽}=\frac{8}{60}=0.133=8$分钟。

不同作业量时，系统的负荷分别为

$$\rho_1=\frac{600}{20\times 2\times 60}=0.25;\quad \rho_2=\frac{1000}{20\times 2\times 60}=0.42;$$

$$\rho_3=\frac{1800}{20\times 2\times 60}=0.75;\quad \rho_4=\frac{2000}{20\times 2\times 60}=0.83.$$

相应的待卸时间

$$t_1=\frac{0.25\times 8(1+0.5^2)}{2(1-0.25)}=1.6';\quad t_2=3.4';$$

$t_3=15'$；$t_4=24.4'$。

计算表明，随着负荷水平的增加，排队时间也增加，当负荷水平达到0.85后，等待时间增加特别快。

**35** 试比较二种售票工具：用一台$A$型售票机，其强度为$\mu_A$；用二台$B$型售票机，它们的能力相等，且$\mu_B=\dfrac{\mu_A}{2}$。

**解** 因为它们有相同的顾客到达流，设其强为$\lambda$。则售票机器负荷系数

$$2\rho_A=\frac{2\lambda}{\mu_A}=\frac{\lambda}{\mu_B}=\rho_B.$$

顾客排队平均人数

$$L_{队A}=\frac{\rho_A}{1-\rho_A},\quad \cdots(1)$$

$$L_{队B}=\frac{\rho_B^3}{4-\rho_B^2}=\frac{2\rho_A^3}{1-\rho_A^2}.\quad \cdots(2)$$

$\dfrac{(1)}{(2)}$得$\dfrac{L_{队A}}{L_{队B}}=\dfrac{1+\rho_A}{2\rho_A}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\rho_A}}{2}$.

因为 $0<\rho_A<1$，所以用$A$型售票机时，顾客排队时间较长。

现在求售票系统内的顾客平均数$L_系$。

$$L_{系A}=\frac{\rho_A}{1-\rho_A}.\quad \cdots(3)$$

$$L_{系B}=\frac{4\rho_B}{1-\rho^2_B}=\frac{2\rho_A}{1-\rho^2_A}.\quad \cdots(4)$$

$\dfrac{(3)}{(4)}$得$\dfrac{L_{系A}}{L_{系B}}=\dfrac{1+\rho_A}{2}$.

因为 $0<\rho_A<1$，所以两者的比值永远小于1。或者说，从顾客在系统内总的停留时间看，$A$型售票机优于$B$型。

**36** 一年有302只货船到达某港。平均卸船时间为58.3小时。因为卸货用的码头不足造成货轮停港待卸。货轮停港一天的费用为：$c_1=1000$元。但有时没有船到，码头闲置。如果码

头闲置一天的费用为$c_2=863$元。试求码头的合理数目。

**解** 货轮到港强度$\lambda=\dfrac{302}{365}=0.827$只/天；

码头卸货强度$\mu=\dfrac{24}{58.3}=0.412$只/天；

码头能力利用率：

$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{0.827}{0.412}=2$，即至少要有二个码头。欲求合理的码头数量必须使货轮停港待卸费用和码头闲置费用最少。两者总费用方程为

$$E=L_{队}c_1+(m-\rho)c_2.$$

式中

$$L_{队}=\frac{\rho}{m-\rho}\cdot\frac{\dfrac{e^{-\rho}}{m!}}{\rho^m\dfrac{e^{-\rho}}{m!}+\left(1-\dfrac{\rho}{m}\sum_{n=0}^{n-1}\rho^n\dfrac{e^{-\rho}}{n}\right)}$$

计算过程和其结果列于表：
由表中数值可见，建造5个码头费用最少。

**计 算 排 队 长 度 表**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 造船的码头数目$m$ | $\dfrac{\rho^m e^{-\rho}}{m!}$ | $\sum_{n=0}^{n-1}\dfrac{\rho^n e^{-\rho}}{n!}$ | $1-\dfrac{\rho}{m}$ | $(2+3\times4)$格 | $L_{队}$ |
| 3 | 0.1804 | 0.6767 | 0.333 | 0.4060 | 0.8889 |
| 4 | 0.0902 | 0.8571 | 0.500 | 0.5188 | 0.1739 |
| 5 | 0.0361 | 0.9473 | 0.600 | 0.6045 | 0.0398 |
| 6 | 0.0120 | 0.9834 | 0.667 | 0.6680 | 0.0090 |
| 7 | 0.0034 | 0.9955 | 0.714 | 0.7149 | 0.0019 |
| 8 | 0.0009 | 0.9989 | 0.750 | 0.7499 | 0.0004 |

这时，货轮平均停港$\frac{0.0398}{0.827}=0.048$昼夜或1.15小时，在一年内货轮停港时间为$0.0398\times 365=14.52$昼夜。每个码头的利用率为$\frac{\rho}{m}=\frac{2}{5}=0.4$，或40%。

**每 昼 夜 费 用 时 间 表**

| $m$ | $L_{队}C_1$ | $m-\rho$ | $(m-\rho)C_2$ | 总 计 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 8899 | 1 | 863 | 9752 |
| 4 | 1739 | 2 | 1726 | 3465 |
| 5 | 398 | 3 | 2589 | $2987=min$ |
| 6 | 90 | 4 | 3452 | 3542 |
| 7 | 19 | 5 | 4315 | 4334 |
| 8 | 4 | 6 | 5178 | 5182 |

**37** 卸船时间不是固定不变的，它取决于码头上装卸机械的数量$x$。同样码头卸货能力也取决于$x$和工作组织. 经统计，它们的关系列入下表。

| $x$ | 装 卸 机 械 能 力<br>吨/昼夜 | 码 头 卸 船 能 力<br>吨/昼夜 |
|---|---|---|
| 1 | 500 | 500 |
| 2 | 500 | 1000 |
| 3 | 500 | 1500 |
| 4 | 475 | 1900 |
| 5 | 440 | 2200 |
| 6 | 390 | 2340 |

| $x$ | $t_{卸}$(昼夜) | $C_2$元/昼夜 | $\mu=\frac{1}{t_{卸}}$ | $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6.00 | 530 | 0.167 | 4.96 |
| 2 | 3.00 | 640 | 0.333 | 2.48 |
| 3 | 2.00 | 750 | 0.500 | 1.65 |
| 4 | 1.58 | 860 | 0.633 | 1.31 |
| 5 | 1.36 | 970 | 0.733 | 1.13 |
| 6 | 1.28 | 1080 | 0.780 | 1.06 |

试求卸车机械的合理数量$x_{合理}$，或合理的卸船时间$t_{卸}$。

码头闲置费用$c_z=F(x)\times 302$。如果每只船平均装3000吨，每年卸货量为$302\times 3000=906000$吨。从而可确定，卸船时间

| $x$ | $m$ | $1-\frac{\rho}{m}$ | $L_{队}$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 0.450 | 0.0934 | 3084 |
| | 10 | 0.505 | 0.0335 | 3015 |
| | 11 | 0.549 | 0.0116 | 3316 |
| 2 | 5 | 0.503 | 0.128 | 2890 |
| | 6 | 0.586 | 0.0332 | 2582 |
| | 7 | 0.645 | 0.0084 | 2974 |
| 3 | 3 | 0.448 | 0.360 | 4720 |
| | 4 | 0.586 | 0.0703 | 2463 = min |
| | 5 | 0.669 | 0.0145 | 2655 |
| 4 | 3 | 0.564 | 0.132 | 3260 |
| | 4 | 0.679 | 0.0232 | 2591 |
| | 5 | 0.739 | 0.0040 | 3229 |
| 5 | 2 | 0.438 | 0.505 | 5900 |
| | 3 | 0.626 | 0.0715 | 2540 |
| | 4 | 0.719 | 0.0125 | 2905 |
| 6 | 2 | 0.470 | 0.4090 | 5107 |
| | 3 | 0.647 | 0.0551 | 2641 |
| | 4 | 0.735 | 0.0087 | 3267 |

$t_{卸}=\frac{3000}{码头能力}$，并给定码头闲置费用$c_2$。当用不同的码头数量和机械数量时，合理的数值为建造$m=4$个码头，每个码头上配备$x=3$台装卸机。

这时平均卸船时间$t_{卸}=2$昼夜，货船每年平均停港待装卸时间为$0.0703\times365=25.6$天。每艘船平均停港待卸$\frac{0.0703}{0.827}=0.085$昼夜$=2.04$小时。码头平均利用率$\frac{\rho}{m}=0.4135=41\%$。

**38** 某备件仓库用板车和电动小车运送备件。仓库的装卸机械是吊车。如果所有的吊车都不空，小车和板车就排队等待作业。吊车装车时间服从指数分布，其参数为$\mu$，板车和小车到达间隔服从指数分布，其参数为$\lambda$。

实际观测结果：电动小车到达强度$\lambda_{电}=5$(车/时)；板车到达强度$\lambda_{板}=0.3$(车/时)。每辆电动小车能力为：$\mu_{电}=4$(件/时)；板车能力：$\mu_{板}=2$(件/时)。今有吊车5台，每辆电动小车可装备件6个；板车装备件20个。现有2种组织方式：(1) 每台吊车固定为一定的小车和板车服务；(2) 不固定。试问哪种组织方式有利。

**解** 第一种组织方式是多个单通道排队模型，到达流由电动小车和板车组成，其综合强度为$\lambda_1=\frac{\lambda_{电}}{n}+\lambda_{板}=\frac{5}{5}+0.3=1.3$。

每部吊车平均能力

$$\mu_1=\mu_{电}\frac{\lambda_{电}}{n\lambda_1}+\mu_{板}\frac{\lambda_{板}}{n\lambda_1}=4\cdot\frac{5}{5\times1.3}+2\cdot\frac{0.3}{5\times1.3}=5.34.$$

∴ 吊车的平均负荷

$$\rho_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{1.3}{5.34}=0.367.$$

系统内排队等待装车的小车和板车的平均数

$$L_{队1}=\frac{\rho_1^{\;2}}{1-\rho_1}=\frac{0.367^2}{1-0.367}=0.213.$$

系统内的板车和电动小车平均数

$$L_{系}=\frac{\rho_1}{1-\rho_1}=\frac{0.367}{1-0.367}=0.58.$$

等待装车的平均时间

$$W_{队1}=\frac{L_{队1}}{\lambda_1}=\frac{0.213}{1.3}=0.165\text{小时}=9.8(\text{分}).$$

板车和电动小车在系统内的停留时间

$$W_{系1}=\frac{L_{队}}{\lambda_1}+\frac{1}{\mu_1}=\frac{0.213}{1.3}+\frac{1}{5.34}=0.446(\text{小时})$$

$$=26.8(\text{分}).$$

第二种组织方式是多通道排队模型．有五部吊车，即五条通道．因而，综合输入流的强度 $\lambda_2=\lambda_{电}+n\lambda_{板}=5+5\times0.3=6.5$。

吊车能力$\mu_2=\mu_{电}\frac{\lambda_{电}}{\lambda}+\mu_{板}\frac{n\lambda_{板}}{\lambda}=4\frac{5}{6.5}+2\frac{5\times0.3}{6.5}=3.54$

吊车的平均负荷

$$\rho_2=\frac{\lambda_2}{\mu_2}=\frac{6.5}{3.54}=1.835.$$

每部吊车的平均利用率

$$\eta=\frac{\rho_2}{n}=\frac{1.835}{5}=0.367.$$

系统内，排队等待作业的车数

$$L_{队2}=\frac{\rho^{n+1}}{n!\,n\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}p_0=\frac{\rho^{n+1}}{n!\,n\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n-\rho}\right)}=\frac{1.835^{5+1}}{5!5\left(1-\frac{1.835}{5}\right)^2}$$

$$\cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{5}\frac{1.835^k}{k!}+\frac{1.835^5}{5!}\left(\frac{1.835}{5-1.835}\right)}=0.025.$$

系统内平均车辆数

$$L_{系2}=L_{队2}+\rho_2=0.025+1.835=1.86.$$

车辆等待装车的平均时间

$$W_{队2}=\frac{L_{队2}}{\lambda_2}=\frac{0.025}{6.5}=0.23\text{分钟}.$$

车辆在系统内的平均停留时间等于排队等待时间的均方差

$$\sigma_{(w队)}=\frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}}{\mu-\lambda}.$$

$\therefore$ $\sigma_{(w队)10}=0.27$；$\sigma_{(w队)14}=0.39$；$\sigma_{(w队)18}=0.50$.

排队等待时间的偏离系数 $\nu_{(w队)}=\sqrt{\frac{2}{\rho}-1}$.

$\therefore$ $\nu_{(w队)10}=1.73$；$\nu_{(w队)14}=1.36$；$\nu_{(w队)18}=1.11$.

上述计算表明：当系统负荷水平接近于1时，各项效率指标有很大增加.

**39** 某港在200天内有100条拖轮到达. 每条拖轮拽驳船五只($n=5$). 装煤的驳船数是随机变数. 每条拖轮拽的驳船中可能有0，1，2，3，4，5艘装煤. 求：拖轮拽的驳船中有0，1，2，3，4，5只装煤时的概率.

**解** $\because m=1$，$n=5$. $\therefore p=\frac{1}{5}=0.2$.

不装煤的船的概率为$1-p=0.8$.

装煤的驳船数目按公式计算.

$$p(s=m)=p_n(m)=c_n^m p^m(1-p)^{n-m}.$$

计算结果列于下表：

| 装煤的驳船数 | 装煤驳船数的概率 | 驳船数 | 累计频数 | 累计船数 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $P_0=\frac{5!}{0!(5-0)!}0.2^0\times0.8^5$ | 32.77 | 0.32768 | 32.77 |
| 1 | $P_1=\frac{5!}{1!(5-1)!}0.2^1\times0.8^4$ | 40.96 | 0.73728 | 73.73 |
| 2 | $P_2=\frac{5!}{2!(5-2)!}0.2^2\times0.8^3$ | 20.48 | 0.94208 | 94.21 |
| 3 | $P_3=\frac{5!}{3!(5-3)!}0.2^3\times0.8^2$ | 5.12 | 0.99328 | 99.97 |
| 4 | $P_4=\frac{5!}{4!(5-4)!}0.2^4\times0.8^1$ | 0.64 | 0.99968 | 99.33 |
| 5 | $P_5=\frac{5!}{5!(5-5)!}0.2^4\times0.8^0$ | 0.03 | 1.0000 | 100 |

**40** 车站货物装卸设备有三个设计方案，记作甲、乙、丙。我们的目的是选择最小费用方案。各方案费用如下表所列：

| 方案名称 | 固定费用(元/天) | 可变操作费(元)$C$. | 装卸件数(件/时) |
|---|---|---|---|
| 甲 | 60 | 100 | 1000 |
| 乙 | 130 | 150 | 2000 |
| 丙 | 250 | 200 | 6000 |

设车辆按泊松流到来，平均每天（按10小时计）到达15辆。每辆车平均装500件。卸车时间为指数分布。每辆车停留一小时的费用为10元。

**解** $\lambda=\frac{15}{10}=1.5$辆/时。

服务强度分别为

$$\mu_{甲}=\frac{1000}{500}=2辆/时，\quad \therefore \rho_{甲}=\frac{1.5}{2}=0.75。$$

$$\mu_{乙}=\frac{2000}{500}=4辆/时，\quad \therefore \rho_{乙}=\frac{1.5}{4}=0.375。$$

$$\mu_{丙}=\frac{6000}{500}=12辆/时，\quad \therefore \rho_{丙}=\frac{1.5}{12}=0.125。$$

一辆车在系统内平均停留时间为

$$W_{系}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

故 $$W_{系}^{甲}=\frac{\rho_{甲}}{\lambda(1-\rho_{甲})}=\frac{0.75}{1.5(1-0.75)}=2小时/辆。$$

同理 $$W_{系}^{乙}=0.4小时/辆,$$

$$W_{系}^{丙}=0.095小时/辆。$$

因此，每天车辆在系统内的停留费用

$$E=W_{系}\times 10\times 15元/天$$

每天实际可变费用（如燃料费）为每天的可变操作费乘设备的利用系数$\rho$. 即

$$E_{可变}=c_i\rho。$$

各方案费用计算结果列于下表

| 方案名称 | 固定费/天 | 可变费/天 | 停留费/天 | 总费用/天(元) |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 60 | 75.00 | 300 | 435 |
| 乙 | 130 | 56.25 | 60 | 246.25 |
| 丙 | 250 | 25.00 | 14.25 | 259.25 |

由上表可知，方案乙的费用最少，即最优。

**41** 车辆按泊松流到达货场．平均每小时到达三辆．装卸作业组平均每小时可卸车四辆．卸车时间按指数分布．求装卸

组每天有多少空闲时间？车辆平均待卸时间多长？

**解** 乍一看，卸车能力大于车辆到达强度，不会发生待卸事情．实际却不然，由于车辆到达和卸车时间是波动的．在某个阶段内，车辆集中到达．因而车辆待卸还是经常发生的．

据题意，本题为单通道无限排队系统．

$$\lambda=3,\ \mu=4,\ \rho=\frac{3}{4}=0.75.$$

装卸组空闲的概率为

$$P_0=1-\rho=1-0.75=0.25.$$

如果每天按 8 小时工作计算，则有空闲时间平均为$8P_0=8\times0.25=2$小时．车辆平均待卸时间为

$$W_{队}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{0.75^2}{0.25}=0.7\text{小时}.$$

我们讨论优先服务的情形：

设顾客具有相对优先服务的权利．根据[　　]它的平均等待时间为

$$(W_{队})_1=\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_1}}=\frac{\rho}{1-\rho_1}\frac{1+v^2}{2}\bar{t}_{服}.$$

式中，　$\lambda_1$—具有相对优先服务的顾客的到达强度

$\mu_1$—该顾客流的服务强度．

$\rho_1$—负荷水平．

具有次级优先权时，顾客平均等待时间

$$(W_{队})_2=\frac{\frac{\lambda}{2}\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\rho_1}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}\frac{1+v^2}{2}\bar{t}_{服}.$$

上述两种顾客的平均等待时间为

$$W_{队}=(W_{队})_1+(W_{队})_2=\frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\rho}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\cdot\frac{1+v^2}{2}\bar{t}_{服}.$$

如果$\dfrac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)}{(1-\rho_1)}<1$，则等待时间$W_{队}$小于$\dfrac{\frac{\lambda}{2}\left(\sigma^2+\frac{1}{\mu^2}\right)}{1-\rho}$（没有优先服务时）.

若$\mu_2<\mu_1$，则当具有优先服务的顾客的平均服务时间较小时，采用优先服务是有利的.

**42** 某货场有两种货物：集装箱，重型货物用大型汽车装运，每件货物重2500公斤(集装箱). 自汽车上卸货用两台吊车(在仓库内)、每台吊车一次可吊5吨货物. 装有集装箱的汽车可以不排队卸货. 必须确定如何改变平均等待时间（与没有优先时比较）(先到先卸). 汽车到达强度和服务时间列于表(10.5).

**表10.5**

| 货物品名 | 卸货连续时间$t$秒 | 一小时内服务的汽车数$\mu$ | 一小时内到达的汽车数$\lambda$ | 吊车负荷水平 |
|---|---|---|---|---|
| 集 装 箱 | 133.0 | 27.0 | 15 | 0.555 |
| 重型货物 | 163.0 | 22.0 | 6 | 0.273 |
| 平　　均 | 141.5 | 25.4 | 21 | 0.828 |

每辆汽车平均等待时间(无优先权时)

$$W_{队}=\frac{0.828}{1-0.555}\times\frac{1.05}{2}\times141.5=362秒.$$

对装有集装箱的汽车（有优先权）的平均等待时间为：

$$(W_{队})_1=\frac{0.828}{1-0.555}\cdot\frac{1.05}{2}\times141.5=140秒.$$

对装有重型货物的汽车的平均等待时间为

$$(W_{队})_2 = \frac{1}{(1-0.555)} \times \frac{0.828}{(1-0.828)} \frac{1.05}{2} \times 141.5$$
$$= 816秒.$$

两种装货汽车的平均等待时间

$$(W_{队})_{1,2} = \frac{\left(1-\frac{15}{21}\times 0.828\right)}{(1-0.555)} \times \frac{0.828}{(1-0.828)}$$
$$\times \frac{1.05}{2} \times 141.5 = 193秒.$$

因此，汽车一次货物作业，具有优先权先到先卸时，平均等待卸车时间减少169秒。装集装箱的汽车平均等待时间由362秒减少到140秒，而装重型货物的汽车的平均等待时间增加到816秒。

装集装箱的汽车在仓库内平均停留时间为 362 + 133 = 495秒 = 8.25分钟，装重型货物的汽车停留时间为 362 + 163 = 525秒 = 8.75分钟。

43 在某港码头卸货的有甲、乙两种类型的船只共200只，其中，甲型船80只，乙型船120只。每只船的载重量都是1000吨。两种船每小时的作业费用几乎相等。用三吨吊车卸船。卸船时间如下：

| 船　型 | 卸船时间 | 服务强度 | 到达强度 | 吊车利用系数 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 9 | 543 | 80 | 0.15 |
| 乙 | 12 | 400 | 120 | 0.30 |

卸船时间偏离系数$v=0.223$。卸船规则：1）先到先卸；2）优先卸船。求平均等待卸船时间。

**解** 1）先到先卸时待卸时间为：

$$W_{队} = \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1+v^2}{2} \bar{t}_{卸}$$

$$= \frac{(0.15+0.30)}{1-0.45} \frac{1+0.223^2}{2} \times \frac{9+12}{2}$$

$$= 4.62小时.$$

甲型船停港时间 $W_{系}^{甲} = 9 + 4.62 = 13.62$小时.

乙型船停港时间 $W_{系}^{乙} = 12 + 4.62 = 16.62$小时.

所有船只总共停港时间

$$13.62 \times 80 + 16.62 \times 120 = 3080小时.$$

每只船平均停留时间：$\frac{3080}{200} = 15.4$小时.

2）优先卸甲型船.

$$W_{队} = \frac{(1-r\rho)(1+v^2)}{(1-\rho_{甲})2} \frac{\rho}{1-\rho} \bar{t}_{卸}.$$

式中　$r$—甲型船的比例，$\frac{80}{120+80} = 0.4$；

$\rho$—总负荷，$0.15 + 0.3 = 0.45$.

$\rho_{甲}$—卸甲型船的吊车的负荷，$\rho_{甲} = 0.15$,

$\bar{t}_{卸}$—平均卸船时间，$\frac{9+12}{2} = 10.5$

$$\therefore \quad W_{队} = \frac{1-0.4\times0.45}{1-0.15} \frac{0.45}{1-0.45} \times \frac{1.05}{2} \times 10.5 = 4.35小时.$$

即采用优先卸货时，减少待卸时间$4.62 - 4.35 = 0.27$小时. 这里减少待卸时间不多的原因是吊车的利用系数不大. $\rho = 0.45$. 如果$\rho$较大，则采用优先卸船是较有利. 但不知道优先那种型号的货船，即优先的条件. 请看下一个例题.

**44** 两种不同类型的车辆，虽然卸车时间不等，但是卸车费用相同。试问那类车辆优先卸货最好？

**解** 优先卸车的条件为：

$$\frac{G_1 r_1}{G_2 r_2} > \frac{t_1}{t_2},$$

式中 $G_1$，$G_2$——分别为二种类型车辆的载重量

$r_1$，$r_2$—分别为二种类型车辆载重量的利用系数。

$t_1$，$t_2$—分别为二种类型车辆的卸车时间；

如果上述条件满足，则应优先卸第一类型的车辆。

如果两种类型的车辆卸车费用不同，则，

$$\frac{c_1 t_1}{G_1 r_1} > \frac{c_2 t_2}{G_2 r_2}.$$

这时，应优先卸第一类型的车辆。

如果载重量和利用率相同，则优先卸车取决于作业时间费用 $c$ 和占用卸车设备的时间 $t$。

**45** 某海港有甲、乙两种船装矿石。用吊车卸船。两种船到达强度相等，其余资料如下：

| 船　型 | 载 重 量 | 船一小时费用 | 卸船时间 | 利用率 | 二台吊车生产能力 |
|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 3960 | 29.2 | 10.00 | 1 | 400 |
| 乙 | 10900 | 47 | 22.15 | 1 | 500 |

**解** 根据条件：$\frac{c_1 t_1}{G_1 r_1} > \frac{c_2 t_2}{G_2 r_2}$.

对甲船：$\frac{47\times 22.15}{10900\times 1} = 0.096$.

对乙船：$\frac{29.2\times 10}{3960\times 1} = 0.074$.

0.096>0.074。所以优先卸甲船。

这时两种船的总费用最少，但占用码头的时间不变。即排队规则对占用码头的时间无关。

**46** 某港码头每昼夜有$\lambda=0.855$只货船到达。码头上备有三吨吊车卸货，其能力为$\mu_1=0.95$船/昼夜。货船造价为$k_1=300000$元；一台吊车的价格$k_{吊}=45000$元；吊车等待作业一小时的费用$b=2.92$元；作业一小时的费用$a=5.85$元；投资效果为$k_{效}=0.1$，求合理的吊车台数。

**解** 设合理的吊车数为$S$，则年度总费用方程为

$$E_S=K_{吊}k_{效}S+\frac{\lambda}{S\mu_1-\lambda}K_1k_{效}+(a-b)t_{作}+btS$$
$$+\frac{c\lambda}{S\mu_1-\lambda}t.$$

式中 $K_{吊}$——一台吊车的投资；

$k_{效}$—投资效果，一般取0.1；

$S$—吊车台数；

$K_1$——一只船的造价；

$\dfrac{\lambda}{S\mu_1-\lambda}$—排队等待卸货的船只平均数；

$b$—吊车闲置费；

$a$—吊车作业费。

$t$——一年内，有船只到港的时间；

$c$—货船停港一小时的费用为9.95元；

$t_{作}$—吊车作业时间为8322小时。

求 $\dfrac{dE_S}{dS}=0$。得

$$S_{合理}=\frac{\lambda}{\mu_1}+\sqrt{\frac{(k_{效}K_1+ct)\lambda}{(k_{效}K_{吊}+bt)\mu_1}}=\frac{0.855}{0.95}$$

$$+\sqrt{\frac{(300000\times0.1+9.95\times8760)0.855}{(45000\times0.1+2.92\times8760)0.95}}$$

$=2.76$台。

吊车只能是正整数。因此，是采用 2 台还是 3 台呢？为此，作如下计算：

当 $S=2$时．总费用为

$$E_2=(5.85-2.92)\times8322+(2.92\times8760+0.1\times45000)\times2+\frac{0.855}{2\times0.95-0.855}(300000\times0.1+9.95\times8760)=179833\text{元}。$$

当 $S=3$时的总费用为：

$E_3=167933$元。

计算总费用表明，采用三台吊车在经济上较为合理。

当 $S=3$台时，平均卸船时间

$$\bar{t}_{卸}=\frac{24}{S\mu_1}=\frac{24}{3\times0.95}=8.45\text{小时}。$$

每只船平均待卸时间

$$W_{队}=\frac{\rho}{1-\rho}\bar{t}_{卸}=\frac{\frac{\lambda}{S\mu_1}}{1-\frac{\lambda}{S\mu_1}}\bar{t}_{卸}=\frac{\frac{0.855}{3\times0.95}}{1-\frac{0.855}{3\times0.95}}\times8.45=3.62(\text{小时})。$$

每只船平均停港时间

$$W_{系}=W_{队}+\bar{t}_{卸}=3.62+8.45=12.07(\text{小时})。$$

根据这些效率指标可以制订码头标准作业时间。

如果卸货的吊车改用10吨；每台吊车价格$K_{吊}=90000$元；$a=9.47$元；$b=3.49$元；$\mu_1=2.2$，$t_{作}=3480$。其它条件不变，应配备几台吊车？

$$S_{合理}=\frac{0.855}{2.2}+\sqrt{\frac{(300000\times0.1+9.95\times8760)0.855}{(0.1\times90000+3.49\times8760)\times2.2}}$$

$$=1.46台。$$

当采用$S=1$时的费用

$$E_1=(9.47-3.49)\times3480+3.49\times8760+0.1\times90000+\frac{0.855}{2.2-0.855}(300000\times0.1+9.95\times8760)=154480元。$$

当 $S=2$时，

$$E_2=128080元。$$

计算表明配备二台吊车是合理的；采用三吨的吊车三台和10吨的吊车二台比较．后者比前者节省近20000元．因此，不仅要确定吊车的合理台数，还要确定吊车的合理能力．

当采用二台10吨吊车时，平均卸船时间为

$$\bar{t}_{卸}=\frac{24}{2\times2.2}=5.45小时，$$

平均待卸时间：

$$W_{队}=\frac{\frac{0.855}{2\times2.2}}{1-\frac{0.855}{2\times2.2}}\times5.45=1.31(小时)。$$

货船平均停港时间

$$W_{系}=5.45+1.31=6.76小时。$$

计算表明采用10吨吊车可以压缩卸货和停港时间近1.8倍．

**47** 汽车在露天采砂场运砂．用一台或几台挖掘机装车．当汽车到达间隔大于装车周期时，挖掘机空闲；反之，汽车待装．

设有一辆汽车到来时，同时有几台挖掘机装车（一个装车组）。设汽车到达为泊松流，装车时间为任意分布。装车时间与装车机数目成反比。试求汽车排队等待装车平均时间。

设有$S$台挖掘机，它们的装车时间及其方差为：

| № | 装车时间 | 方差 |
|---|---|---|
| 1 | $t_1$ | $\sigma_1^2$ |
| 2 | $t_2$ | $\sigma_2^2$ |
| … | … | … |
| $s$ | $t_s$ | $\sigma_s^2$ |

所有挖掘机集体装车，其平均装车时间为

$$\frac{1}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_s}=\frac{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\cdots+\bar{t}_s}{s}.$$

集体装车时间的方差为

$$\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_s^2.$$

集体装车时，汽车平均等待装车时间

$$W_{队}=\frac{t^2+\sigma^2}{2(i_{均}-t)}$$

$$=\frac{(\bar{t}_1+\bar{t}_2+\cdots+\bar{t}_s)^2-[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_5^2)}{2s[si_{均}-(\bar{t}_1+\bar{t}_2+\cdots+\bar{t}_s)}.$$

如果$s$台挖掘机的能力相等，即

$$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_s$$

则 集体服务时间的平均值为

$$\frac{1}{s\mu}=\bar{t}_{服},$$

即一台机器的生产能力比$s$台机器的生产能力小$s$倍。

集体服务时间的方差

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_s^2\qquad \sigma_I^2=\left(\frac{\sigma}{s}\right)^2.$$

均方差 $\sigma_I = \frac{\sigma_s}{s}$。

这时，$$W_{队} = \frac{t^2+\sigma^2}{2(i_{均}-t)} = \frac{\left(\frac{\bar{t}_{服}}{s}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{s}\right)^2}{2\left(i_{均} - \frac{\bar{t}_{服}}{s}\right)}$$

$$= \frac{\bar{t}^2_{服}+\sigma^2}{2s(si_{均}-\bar{t}_{服})}.$$

例如，汽车平均到达间隔$i_{均}=36$分钟，服务设备中可能有一、二、三、四个服务员(吊车)．如果一台吊车装车时间为24小时，其方差为9小时，均方差3小时．求：有不同数目吊车时，汽车平均等待作业时间：

有一台吊车$(W_{队})_1 = \frac{24^2+9}{2(1.36-24)} = 24.4$小时；

二台吊车 $(W_{队})_2 = \frac{24^2+9^2}{2\times 2(2\times 36.24)} = 3.0$小时；

三台吊车，$(W_{队})_3 = \frac{24^2+9}{2\times 3(3\times 36-24)} = 1.14$小时；

四台吊车，$(W_{队})_4 = \frac{24^2+9}{2\times 4(4\times 36-24)} = 0.6$小时。

汽车在服务系统停留时间为：

一台吊车时，$(W_{系})_1 = 24.4+24 = 48.4$小时；

二台吊车时，$(W_{系})_2 = 3+\frac{24}{2} = 15$小时；

三台吊车时，$(W_{系})_3 = 1.14+\frac{24}{3} = 9.14$小时，

四台吊车时，$(W_{系})_4 = 0.6+\frac{24}{4} = 6.6$小时。

**48** 设某城市有三个煤码头：西、北南码头．在250天中有

180只煤船来到本市。为了改变煤船停留时间，采用四个方案：

1）三个码头，平均每个卸60只煤船。每个码头有一个卸货位；每个卸货位上配备一台卸煤机。

2）集中在西码头卸货。码头上设有三个卸货位，每个卸货位配备一台卸煤机。

3）集中在西码头卸货。码头上只有一个卸货位，但有三台卸煤机。

4）集中在北码头卸货。码头上只有一个卸货位，配备一台卸煤机。

试问那个方案最好？

**解** 本服务系统中，卸货位是服务设备。在(1)和(2)方案中，卸货位数目相等。在(3)和(4)方案中，卸货位只有一个。但(1)(2)和(3)方案中卸煤机的总数是相等的。煤船停留时间如下表所列：

| 码头名称 | 卸船数目 | 卸货位 | 卸煤机数目 | 货船强度 | 卸货等时间 | 等待卸货时间 | 总时间 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 第一方案 | | | | |
| 西 | 60 | 1 | 1 | 0.25 | 1500 | 279.6 | 1779.6 |
| 北 | 60 | 1 | 1 | 0.25 | 1500 | 279.6 | 1779.6 |
| 南 | 60 | 1 | 1 | 0.25 | 1500 | 279.6 | 1779.6 |
| | | | 第二方案 | | | | |
| 西 | 180 | 3 | 3 | 0.75 | 4500 | 64.8 | 4564.8 |
| | | | 第三方案 | | | | |
| 西 | 180 | 1 | 3 | 0.26 | 1560 | 187.0 | 1747.0 |
| | | | 第四方案 | | | | |
| 北 | 180 | 1 | 1 | 0.75 | 4500 | 7425.0 | 11925.0 |

由方案(3)和(4)可见，一个卸货位上装三台卸煤机和装一台卸煤机相比，等待卸货时间由187小时增到7425小时.方案(2)说明，三台卸煤机装在三个卸货位上，等待卸货时间只有64.8小时. 按方案(1)组织卸煤，则等待卸船时间为

$$3\times 279.6=838.8\text{小时}.$$

如果我们不是考虑等待卸船时间，而是煤船在码头上总的停留时间，由表(9.9)中可见，当采用方案(1)时，为3×1779.6=5338.8小时(在250天内). 而采用方案(3)时为1747小时.它比方案(1)少3倍时间；比方案(2)少2.66倍. 货物作业集中的结果，在卸煤机投资相等条件下，货船停闲时间费用减少三倍. 此外，方案(3)比方案(2)少两个卸货位. 因而，方案(3)为最优方案.

当然，在实际工作中，还应考虑其它费用.

现在我们讨论顾客集体到达，个别服务时的平均等待时间. 这种现象在运输中经常遇到. 例如，送车到货场装货.

设列车自编组站送车到装车点服从泊松流，车列中装某种货物的车辆数服从二项分布. 即或者装某种货物，或者不装某种货物. 车列到达强度为$\lambda$，每辆车的货物作业平均时间为$\bar{t}_{服}$(考虑对货位时间，装车完毕后立即取走)，装车时间的方差为$\sigma^2$.

当顾客单个到达时，顾客到达流为泊松流，任意服务时间时，顾客排队平均等待时间按伯拉千克-欣钦公式确定

$$W_{队}=\frac{\rho}{1-\rho}\frac{S_2}{2S_1}.$$

式中　$\rho$—系统负荷水平

$S_2$—服务时间二阶矩；

$S_1$—服务时间一阶矩.

车列由$n$辆车组成．其中有$m$辆装有某种货物．车列中装有某种货物车辆的概率 $P=\frac{m}{n}$，平均值$m_{均}=P\cdot n$。它的方差$\sigma_1^2=nP(1-P)$。

每辆车的平均装车时间为 $\bar{t}_{服}$，它的方差为$\sigma_2^2$，一列车列货物作业的平均时间为

$$S_1=nP\bar{t}_{服}=m\bar{t}_{服}.$$

一列车列货物作业时间的方差为

$$nP(1-P)\sigma_2^2+(nP)^2\sigma_2^2+nP(1-P)\ \bar{t}^2_{服}.$$

二阶矩为：

$$S_2=nP(1-P)\sigma_2^2+(nP)^2\sigma_2^2+nP(1-P)\bar{t}^2_{服}+(nP)^2\bar{t}^2_{服}.$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{nP[(1-P)\sigma_2^2+nP\sigma_2^2+\bar{t}^2_{服}(1-P)+nP\ \bar{t}^2_{服}]}{nP\bar{t}_{服}}$$

$$=\frac{\sigma^2+\bar{t}^2_{服}}{\bar{t}_{服}}(1+P+n)$$

$$=\frac{(n^2+n-m)}{n}\cdot\frac{(\sigma_2^2+\bar{t}^2_{服})}{\bar{t}_{服}}.$$

把它代入公式(10.2)得：

$$W_{队}=\frac{\rho}{(1-\rho)}\frac{(\sigma_2^2+\bar{t}^2_{服})}{2\bar{t}_{服}}\cdot\frac{(n^2+n-m)}{n}.$$

每辆车的平均等待时间将小$m$倍，即

$$(W_{队})_1=\frac{\rho}{1-\rho}\frac{(\bar{t}^2_{服}+\sigma^2)}{2\bar{t}_{服}}\frac{(n^2+n-m)}{m\cdot n}$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}\frac{1+v^2}{2}\bar{t}_{服}\frac{(n^2+n-m)}{m\cdot n}.$$

式中 $v$—服务时间的偏离系数。

**49** 江岸编组站送车到货场，每次送车$n=4$辆，其中有煤

车$m=1.5$辆．货场上有一台卸煤机，它的负荷水平为0.6． 每卸一辆车平均21分钟．它的方差$\sigma^2=49$或$\sigma=7$分钟．

车列平均等待卸车时间

$$W_{队}=\frac{0.6(21^2+7^2)(4^2+4-1.5)}{2(1-0.6)21\times4}=80.9\text{分钟}.$$

每辆车的平均等待卸车时间

$$(W_{队})_1=\frac{80.9}{1.5}=53.9\text{分钟}.$$

如果货物作业完毕的车列立即被拉走，则每辆车在服务系统内平均停留时间为

$$W_{系}=W_{队}+\bar{t}_{服}=53.9+21=74.9\text{分钟}.$$

**50** 运输汽车到达成品仓库的间隔时间服从指数分布，其数学期望（平均到达间隔时间）为0.1小时，其强度为$\lambda=\frac{1}{0.1}=10$辆/时．

仓库用桥式吊车卸车，卸车强度为$\mu=12.5$辆/时．卸车时间固定不变．求服务系统效率指标：

**解** $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{10}{12.5}=0.8$，

$$W_{队}=\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}=\frac{0.8}{2\times12.5\times0.2}=0.16(\text{小时}),$$

$$L_{队}=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}=\frac{0.64}{2\times0.2}=1.6(\text{辆}),$$

$$L_{系}=L_{队}+\rho=1.6+0.8=2.4(\text{辆}),$$

$$W_{系}=\frac{L_{系}}{\lambda}=\frac{2.4}{10}=0.24(\text{小时}).$$

**51** 计算资料同上例．试求桥式吊车合理能力，即汽车待

卸时间和桥吊闲置费用之和最少。已知，汽车等待1小时的费用为$C_{卸}=0.75$元/时。桥吊闲置1小时的费用为$C_{吊}=2$元/时。

**解** 汽车待卸和桥吊闲置费用之和的方程式为

$$E=L_{队}C_{卸}+C_{吊}(1-\rho)=\frac{C_{卸}\rho^2}{2(1-\rho)}+C_{吊}(1-\rho).$$

对上式中的$\rho$进行一次导数，使之为零，整理后得：

$$\rho^*=1-\frac{\sqrt{C_{卸}(C_{卸}+2C_{吊})}}{C_{卸}+2C_{吊}}=1-\frac{\sqrt{0.75\times4.75}}{4.75}$$

$$=0.603.$$

即桥吊合理生产能力应为

$$\mu^*=\frac{\lambda}{\rho^*}=\frac{10}{0.603}=16.6辆/时.$$

而本题中吊车的能力为12.5辆/时，所以它不是合理的。

可以计算仓库因吊车能力不足而损失的费用。

$$E-E_{min}=\frac{C_{卸}\rho^2}{2(1-\rho)}+C_{吊}(1-\rho)-\frac{C_{卸}(\rho^*)^2}{2(1-\rho^*)}$$

$$-C_{吊}(1-\rho^*)=\frac{0.75\times0.8^2}{2\times0.2}+2\times0.2$$

$$-\frac{0.75\times0.603^2}{2\times0.397}-2\times0.397$$

$$=0.463元/时.$$

即仓库每小时损失0.463元。

(2) 顾客到达服从$l$阶爱尔朗流。

设顾客到达为两阶($l=2$)爱尔朗流，服务时间固定不变。顾客平均排队等待时间和排队顾客的平均数根据文献〔10〕可按下式计算：

$$W_{队}=\frac{\phi_0-1+2\rho^2}{4\mu\rho(1-\rho)}$$

排队顾客的平均数：

$$L_{队} = \frac{\phi_0 - 1 + 2\rho^2}{4(1-\rho)}.$$

式中　$\phi_0$—零等待概率，它是取决于到达流分布律和系统负荷$\rho$的函数。

函数$\phi_0$的值可从文献[X]中的图表上查到。我们把它改成下表。

二阶爱尔朗流，固定服务时间、$\Phi_0$值

| $\rho$ | $\phi_0$ | $\rho$ | $\phi_0$ |
|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.98 | 0.55 | 0.61 |
| 0.15 | 0.96 | 0.60 | 0.55 |
| 0.20 | 0.94 | 0.65 | 0.49 |
| 0.25 | 0.92 | 0.70 | 0.43 |
| 0.30 | 0.88 | 0.75 | 0.36 |
| 0.35 | 0.83 | 0.80 | 0.30 |
| 0.40 | 0.78 | 0.85 | 0.22 |
| 0.45 | 0.72 | 0.90 | 0.15 |
| 0.50 | 0.67 | 0.95 | 0.08 |

**52**　货车到仓库卸货。到达流为二阶爱尔朗分布。平均每隔0.1小时到达一次，即$\lambda=10$辆/时。仓库用桥吊卸货。卸车时间是固定的。每小时卸车12.5辆。求系统效率指标。

**解**　已知：$\lambda=10$，$\mu=12.5$，$\therefore \rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{10}{12.5}=0.8$。

由$\rho=0.8$查表得$\phi_0=0.30$。

货车平均等待卸货时间

$$W_{队} = \frac{\phi_0 - 1 - 2\rho^2}{4\mu\rho(1-\rho)} = \frac{0.3-1-2\times0.8^2}{4\times12.5\times0.8\times0.2}$$

$$=0.0725(小时)。$$

待卸车辆的平均数目：

$$L_{队} = \frac{\phi_0 - 1 - 2\rho^2}{4(1-\rho)} = \frac{0.3-1-2\times0.8^2}{4\times0.2}$$

$$=0.725(辆)。$$

卸车系统内车辆的平均数目：

$$L_{系} = L_{队} + \rho = 0.725 + 0.8 = 1.525(辆)；$$

车辆在仓库内平均逗留时间：

$$W_{系}=W_{队}+\frac{1}{\mu}=0.0725+\frac{1}{12.5}=0.1525(\text{小时}).$$

**53** 车辆到达货场组成输入流．它服从最简单流．货场上有$n$台装卸机器，它每小时的生产能力为$q$，货场在一昼夜内作业$Q$吨货物．装卸机器装、卸一组车辆的平均时间为$\bar{t}_{服}$．一昼夜内取和送车辆数为$N$．取和送车辆的平均时间为$\tau_{机}$；调机工作时间为$T$；装、卸机器工作时间为$T_{机}$．试求调机负荷水平？车辆等待取送时间？货场负荷水平？车辆在货场上的等待作业时间？如果到达货场的有两种运输工具，汽车和火车车辆．求两种运输工具的等待作业时间．

**解** 调机负荷 $\rho_{机}=\frac{N\bar{t}_{服}}{T}$.

车辆等待时间 $W_{队}=\frac{N\bar{t}^{2}_{服}(1+V^{2})}{2(T-Nt_{服})}$.

货场上装卸机负荷为 $\rho=\frac{Q}{nqT}=\frac{T_{机}}{T}$.

机器服务时间 $\tau_{机}=\frac{Q}{Nnq}$.

车辆等待作业时间 $W_{队}=\frac{Q^{2}(1+v^{2})}{2nNq(NqT-Q)}$.

把汽车流和火车车辆流组成综合流．则系统内运输工具的等待时间

$$W_{队}=\frac{\frac{Q}{2nqT}\frac{Q}{nNq}(1+v_{车}^{2})+\frac{Q}{2nqT}\bar{t}_{服汽}(1+v_{汽}^{2})}{2\left(1-\frac{Q}{nqT}\right)}.$$

式中 $v_{车}$，$v_{汽}$—分别为装卸机器为火车车辆和汽作业时间的偏离系数．

$\bar{t}_{服汽}$—装卸一辆汽车的平均时间．

稍作整理，上式为

$$W_{队}=\frac{Q[Q(1+V_{车}^2)+Nnq\bar{t}_{服汽}(1+v_{汽}^2)]}{4Nnq(nqT-Q)}.$$

应注意，装卸机器对火车和汽车的负荷都是$\frac{\rho}{2}$.

当服务时间固定不变，输入流为最简单流，即$M|D|1$时，顾客(车辆)排队长度为

$$L_{队}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{Q}{nqT-Q}.$$

**54** 已知：$M|G|1$型排队服务系统．服务时间的偏离系数为$v$．顾客平均排队时间为：

$$W_{队}=\frac{\rho(1+v^2)}{2(1-\rho)}\bar{t}_{服}.$$

排队顾客的平均数为：

$$L_{队}=\frac{\rho^2(1+V^2)}{2(1-\rho)}.$$

今系统内配备$n$台类型相同，能力相等的服务设备为$i$个最简单流服务．试求系统的运行指标$W_{队}$和$L_{队}$．

**解** 因为$i$个最简单流的综合流，也是最简单流．类型相同，能力相等的服务设备的负荷可以看作$\rho=\sum\limits_i\rho_i$，因此

$$W_{队}=\frac{\sum\limits_i\rho_i(1+v_i^2)}{2(1-\sum\limits_i\rho_i)},$$

$$L_{队}=\frac{\sum\limits_i[\lambda_i^2\sigma^2(t_{服i})+\rho_i^2]}{2(1-\rho)}.$$

式中 $v_i^2=\frac{\sigma^2(t_{服i})}{\lambda_i}$.

55　某运输公司备有五辆卡车，它们为货场运送成件包装货物。货主请求送货流呈泊松流。卡车整天（24小时）工作。服务时间为卡车从货主处到货场的走行时间，它服从指数分布。卡车每次送货平均走行时间 $\bar{t}_{服}=1$小时。当有10个货主请求发货时，运输公司不再接受新的货主请求。在这10个货主中，不包括正在运输的五个货主，即系统内被服务顾主的最大数为 $10+5=10$ 个。求所有卡车都在运输的概率，货主排队平均长度。

**解**　本题为多通道排队长度有限的服务系统。所有卡车都在运输的概率。

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0,$$

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\left[\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right]}{n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1}.$$

因为　　$\lambda=\mu=1,\ n=5\quad m=10,$

$$\therefore\qquad P_5=\frac{1}{5!}1^5P_0=\frac{P_0}{5!}.$$

而

$$P_0=\left[1+1+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}+\frac{1^4}{4!}+\frac{1^5}{5!}+\frac{1^5}{5!}\frac{\left[\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^{10+1}\right]}{5!\left(1-\frac{1}{5}\right)}\right]^{-1}=0.367,$$

$$\therefore\qquad P_5=\frac{0.367}{5!}=0.003.$$

即所有汽车都在运输的概率为0.3%。

排队顾客的平均数

$$L_{队}=\frac{\rho^{n+1}P_0}{n\cdot n!}\frac{\left[1-(m+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m+m\left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}\right]}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{1^6\times0.003\left[1-(10+1)\left(\frac{1}{5}\right)^{10}+10\left(\frac{1}{5}\right)^{11}\right]}{5\cdot5!\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$=0.0000078.$$

即 等待服务的货主可以说没有。

**56** 在架高线上，用二台卸车机卸道碴。每台卸车机的能力为60吨/时。在仓库中整天（24小时）有自卸汽车到来。自卸汽车载重8吨。机器工作时间 $T=20$小时/昼夜。仓库货运作业量有很大的波动，其范围为600，1000，1800,2000吨/昼夜。它们相当于有75，125，225，250辆汽车/昼夜到达。车辆到达服从指数分布；服务时间(完成货物作业时间)呈任意分布；其偏离系数$v=0.5$。求车辆等待作业时间。

**解** 服务系统内有二台卸车机，可以看作二个单通道系统，它们有相同的负荷。

自卸汽车平均卸车时间 $\bar{t}_{汽}=\frac{8}{60}=0.133\approx8$分钟。

系统有相应作业量时的负荷为：

$$\rho_1=\frac{600}{20\times2\times60}=0.25;$$

$$\rho_2=\frac{1000}{20\times2\times60}=0.42;$$

$$\rho_3=\frac{1800}{20\times2\times60}=0.75;$$

$$\rho_4=\frac{2000}{20\times2\times60}=0.83.$$

汽车平均等时间：

$$W_{队}^{1}=\frac{\rho_1(1+v^2)}{2(1-\rho_1)}\bar{t}_{汽}=\frac{0.25\times8(1+0.5^2)}{2(1-0.25)}$$

$$=1.6分钟；$$

$$W_{队}^{2}=\frac{0.42\times8(1+0.5^2)}{2(1-0.42)}=3.4分钟；$$

$$W_{队}^{3}=\frac{0.75\times8(1+0.5^2)}{2(1-0.75)}=15分钟；$$

$$W_{队}^{4}=\frac{0.83\times8(1+0.5^2)}{2(1-0.83)}=24.4分钟。$$

上述计算表明，随着系统负荷水平的增加，排队等待时间由慢慢增加到急剧增加。

**57** 在货运站上有二台调机负担车辆取、送。第一台调机为货场服务；车辆输入流为泊松流，每昼夜平均到达14次。第二台调机每昼夜送车16次到同一货场。调车24小时工作。调车作业时间：第一台机车平均 $\bar{t}_1=1.2$小时，第二台调车为$\bar{t}_2=1$小时。两台调机的平均调车时间 $\bar{t}_{服}=1.1$小时。调车作业时间的偏离系数都是$v=1$。服务时间为指数分布。求车辆等待作业时间。

**解** 据题意，二台调机在各自固定的调车区内作业。因而第一调车区内，车辆等待时间为：

$$W_{队}^{1}=\frac{\rho_1(1+v^2)}{2(1-\rho_1)}\bar{t}_{服1},$$

$$\rho_1=\frac{n_1\bar{t}_{服1}}{24}.$$

令 $n_1=14$， $\bar{t}_{服1}=1.2$， $\therefore\ \rho_1=\frac{14\times1.2}{24}=0.7$，

$$W_{队}^{1}=\frac{0.7(1+1^2)}{2(1-0.7)}\times1.2\cong2.7小时。$$

同理，第二调车区内车辆平均等待时间为

$$W_{队}^{2}=\frac{1\times\frac{16}{24}\times 2}{2\left(1-\frac{16}{24}\right)}\cong 2\text{小时。}$$

对全站说，车辆等待时间为

$$W_{队}=\frac{2.7\times 14+2\times 16}{14+16}\cong 2.3\text{小时。}$$

现在我们考虑另一种组织方法。即二台调机不固定调车区，而采用那一台调机有空就担任任何区域内车辆的取送。

这时，车流强度$\lambda=\frac{14+16}{24}=1.25$次/时。两台调机都空闲的概率为：

$$P_0=\left[\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right)+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right]^{-1}.$$

$$\rho=\lambda\,\overline{t}_{服}=1.25\times 1.1=1.375,\quad n=2.$$

$$P_0=\left[\left(1+1.375+\frac{1.375^2}{2}\right)+\frac{1.375^3}{2!(2-1.375)}\right]^{-1}$$

$$=[3.32+2.08]^{-1}=0.185.$$

两台机车都在调车的概率

$$P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0=\frac{1.375^2}{2!}\times 0.185=0.17.$$

车辆平均等待时间

$$W_{队}=\frac{\rho^n P_0}{n\mu\cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}=\frac{1.375^2\times 0.185}{2\cdot 2!\left(1-\frac{1.375}{2}\right)^2}\times 1.1$$

$$=\frac{2.079}{1.25}=1.66\text{小时。}$$

因此，第二种组织方法能够减少车辆等待作业时间。

**58** 在下列条件下：汽车停闲1小时的费用$C_{汽}=1$元；火车车辆停闲1小时的费用$C_{车}=8$元。为一辆汽车装车的时间$t_{汽}=0.2$小时，为火车车辆服务的时间$t_{车}=3$小时。求：车辆和汽车的优先作业方式。

**解** 如果本题为单通道排队服务系统。服务时间为指数分布，

$$则\quad \frac{C_{汽}}{t_{汽}}=\frac{1}{0.2}=5;$$

$$\frac{C_{车}}{t_{车}}=\frac{8}{3}=2.7.$$

因为 5>2.7 所以汽车为绝对优先服务工具。

**59** 单通道服务系统。完成货运作业时间（服务时间）固定不变，输入流为最简单流。为火车车辆服务（装车或卸车）时间$t_{车}=3.0$小时；车辆停闲1小时的费用$C_{车}=10$元；汽车停闲1小时的费用$C_{汽}=1.2$元；平均等待时间$t_{待}=0.3$小时。试求采用混合优先的时刻。

**解** $\dot{\tau}_{待}=t_{车}-\frac{C_{车}}{C_{汽}}t_{汽}=3.0-\frac{10}{1.2}\times 0.2=0.5$小时，

即当距服务完毕的时间小于0.5小时，则把对汽车服务转变到为车辆服务是不合理的。

**60** 车辆和汽车按任意流到达服务系统。如果$t_{车}=3$，$\sigma^2(t_{车})=2.25$，$t_{汽}=0.3$，$\sigma^2(t_{汽})=0.04$，$C_{车}=10$，$C_{汽}=1.2$。任意服务时间。试问汽车绝对优先服务是否合适？为什么？

**解** 使汽车绝对优先服务的必要条件为：

$$\frac{C_{汽}}{t_{汽}}>\frac{C_{车}}{t_{车}}$$

汽车优先服务的充分条件为

$$\frac{C_{汽}{}^{2}\sigma^{2}(t_{汽})\times 2}{t_{汽}} > \frac{C_{车}}{t_{车}},$$

即 $$\frac{2\times 10\times 2.25}{3}=15;\qquad \frac{C_{汽}}{t_{汽}}=\frac{1.2}{0.3}=4.$$

因为15>4，所以必要条件没有满足。虽然问题的充分条件：$\frac{1.2}{0.3}>\frac{10}{3}$。因此，不能为汽车作绝对优先服务而应是先到先服务。因为，为汽车服务的时间的偏离系数太大，优先服务的经济效果不好。

**61** 某编组站每昼夜到达解体列车$N=80$列。在到达场上配备一个列检组（由四挡人组成）。车列由50辆车组成。每辆车的技术检查时间平均为0.016小时。解体车列到达间隔时间的偏离系数$v_{到}=0.9$。车列技术检查作业时间的偏离系数$v_{列}=0.3$。编组站有机械化驼峰一座，峰上配备两台调机。驼峰解体车列的平均时间，包括技术作业中断时间等，$t_{峰}=0.22$小时，驼峰解体时间的偏离系数$v_{峰}=0.45$。试求车辆在到达场上的平均停留时间，包括车列等待和进行技术检查及等待解体的时间。

**解** $t_{停}=t_{待技}+t_{技}+t_{待解}$。

式中 $t_{待技}$—车列排队等待技术检查时间。

$$t_{待技}=\frac{\rho(v_{到}{}^{2}+v_{列}{}^{2})}{\mu(1-\rho)2}.$$

$\rho$—列检组的负荷；

$\frac{1}{\mu}$—车列平均技术作业时间；

$v_{到}$—解体列车到达间隔时间的偏离系数；

$v_{列}$—车列技术检查作业时间的偏离系数

$$\rho=\frac{Nt_{列}}{24};$$

$N$—每昼夜解体车列的平均数；

$t_{列}$—车列技术作业平均时间

$$t_{列}=\frac{\tau m}{n};$$

$\tau$—检查一辆车的平均时间；

$m$—车列组成辆数；

$n$—列检组中检车挡数

或 $$t_{列}=\frac{0.016\times 50}{4}=0.2小时。$$

∴ $$\rho=\frac{80\times 0.2}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

∴ $$t_{待技}=\frac{\frac{2}{3}\left(0.9^2+0.3^2\right)}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}\times 0.2=0.18小时。$$

现在求$t_{待解}$，

$$t_{待解}=\frac{\rho'(v_1^2+v_{峰}{}^2)}{\mu(1-\rho')2}.$$

式中 $\rho'$—驼峰负荷，

$$\rho'=\frac{Nt_{解}}{24};$$

$t_{解}$—解体车列平均时间；

$v_1$—技术作业完了车列的间隔时间的偏离系数。

$$v_1=v_{到}-(v_{到}-v_{列})e^{2v_{到}}$$

$$=0.9-(0.9-0.3)\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times 0.9}=0.61;$$

$v_{峰}$—驼峰解体时间的偏离系数；

$\frac{1}{\mu}$—车列平均解体时间.

$$\therefore \qquad \rho' = \frac{80\times0.22}{24} = 0.73.$$

$$\therefore \qquad t_{待解} = \frac{0.73(0.61^2+0.45^2)}{2(1-0.73)}\times0.22 = 0.17小时.$$

因此，车辆在到达场上的停留时间为

$$t_{停} = 0.18+0.2+0.17 = 0.55小时.$$

**62** 本题的计算资料同上例.试求到达场需要的股道数量.

**解** 设本题中编组站为三级三场图型. 到达场需要的股道数量应等于同时在车场上停留的车列数. 考虑列车不均衡到达和车列作业时间的不确定. 在不同的时刻，需要不同的股道数量. 三级三场编组站到达场，任意时刻，车列总数包括：

(1) 在车站衔接区间和车站到达场系统内的列车数（排队等待技术检查的列车数和正在进行技术检查的列车数，即

$$L^{列}_{系} = \frac{\rho(v_{到}{}^2+v_{列}{}^2)}{(1-\rho)2}.$$

(2) 在列检系统内，车列数的偏离量，即

$$D(L^{列}_{系}) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\cdot\frac{v_{到}{}^2+v_{列}{}^2}{2}.$$

(3) 在驼峰解体系统内，待解车列的平均数，

$$L^{峰}_{队} = \frac{\rho^2(v_1^2+v_{峰}{}^2)}{(1-\rho)^2}.$$

4. 在驼峰系统内，待解车列数的偏离量

$$D(L^{峰}_{队}) = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}\cdot\frac{v_1^2+v_{峰}{}^2}{2}.$$

现在我们代入数值：

$$L_{系}^{列}=\frac{0.67}{0.33}\frac{0.9^2+0.3^2}{2}=2.03\times0.45=0.91;$$

$$D(L_{系}^{列})=\frac{0.67}{0.33^2}\times0.45=2.76;$$

$$L_{队}^{峰}=\frac{0.73^2}{1-0.73}\times\frac{0.61^2+0.45^2}{2}$$

$$=\frac{0.53}{0.27}\times0.286=0.56;$$

$$D(L_{队}^{峰})=\frac{0.73^2(1+0.73-0.73^2)}{(1-0.73)^2}\frac{0.61^2+0.45^2}{2}$$

$$=\frac{0.53(1.73-0.53)}{0.27^2}\times0.286=2.49.$$

根据车站车流量波动服从正态分布的规律以及三倍均方差的规则。而$\sigma=\sqrt{D}$，所以，

$$D(L_{系}^{列})=\sigma^2(L_{系}^{列})\qquad\sigma(L_{系}^{列})=\sqrt{2.76}=1.66.$$

$$D(L_{队}^{峰})=\sigma^2\ (L_{队}^{峰})=\sqrt{2.49}=1.58$$

$$m=0.91+1.5\times1.66+0.56+1.5\times1.58\approx7(股)$$

附加一股机车走行线，到达场总共为8股道。

**63** 某编组站驼峰负荷水平$\rho=0.73$。车列上峰准备作业完了时刻的间隔时间的偏离系数$v_{准}=0.9$。车列解体时间的偏离系数$v_{峰}=0.3$。车场作业可靠性$Q=0.96$。试求到达场股道数量。

**解** 我们把车列解体系统看作单通道排队系统。上峰准备作业完了的车列为顾客，驼峰为服务员。列车延误概率可按下式计算：

$$P_{延}=\rho^{m+1}\frac{v_{准}{}^2+v_{峰}{}^2}{2}$$

因为车场作业可靠性$Q=1-P_{延}$。

所以， $$1-P_{延}=1-\rho^{m+1}\frac{v_{准}^2+v_{峰}^2}{2},$$

或 $$Q=1-\rho^{m+1}\frac{v_{准}^2+v_{峰}^2}{2}.$$

代入具体数值后得：

$$0.96=1-0.73^{m+1}\frac{0.9^2+0.3^2}{2},$$

$$0.73^{m+1}=0.089.$$

两边取对数 $(m+1)\ln0.73=\ln0.089$.

∴ $$m=\frac{\ln0.089}{\ln0.73}-1=6.68\approx7\text{股}.$$

考虑1股机走线，到达场共需8股。

**64** 编组站到达场合理股道数量应分为经济上合理的和技术上可行的两种。经济上合理的股道数量按〔22〕为：

$$m_{到\cdot经济}$$

$$=\ln\left\{\frac{-K_{换}}{(v_{到}^2+v_{峰}^2)\left[\frac{6132\Delta e+0.5K_{换}}{1-\rho_{峰}}+255.5Ne_0\right]\rho_{峰}\ln\rho_{峰}}\right\}$$

$$(\ln\rho_{峰})^{-1}+\frac{N\times t_{占}}{24}.$$

式中 $K_{换}$—铺一股到达线的换算费用；一般34000元。

$v_{到}$，$v_{峰}$—列车到达间隔和车列解体时间的偏离系数；

$v_{到}=0.8$和$1.0$；$v_{峰}=0.33$和$0.5$。

$\Delta e$——一列车小时的费用，取11元；

$e_0$—停车一次费用，取22元；

$\rho_{峰}$—驼峰负荷，取0.8和0.85；

$N$—到达列车数取36到120列；

$t_{占}$—车列占线时间，取1小时。

经济上合理的股道数量如下表所列：

| $N$（列） | 36 | 18 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^*_{经济}$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 |

**65** 确定编组站到达场容量。已知：$K_{换}=12000$元；$N=110$列；$\Delta e=8$元；$e_0=5$元；$\rho=0.8$；$v_{到}=1$；$v_{峰}=0.31$；$t_{占}=0.7$小时；$t_{峰}=0.175$小时；股道有效长$l_{效}=850$米；$m=100$辆/列。

**解** 到达场合理股道数量为

$$m^*=\ln\left[\frac{-12000}{182.5(1+0.31^2)\left(\frac{24\times8}{1-0.8}+110\times5\right)0.8\ln0.8}\right]$$

$$[\ln0.8]^{-1}+\frac{110\times0.7}{24}$$

$$=6.88+3.21\cong11\text{股。}$$

编组站到达场股道的作用有：车列进行技术作业和排队等待解体。

$$L_{队}=\frac{N^2t_{峰}^2(1+v_{峰}^2)}{24^2\times2\left(1-\frac{Nt_{峰}}{24}\right)}$$

$$=\frac{110^2\times0.175^2(1+0.31^2)}{24^2\times2\left(1-\frac{110\times0.175}{24}\right)}=1.75\text{列。}$$

因而 单位时间内，到达场上的列车数为

$$N_{到}=N_{技}+L_{队}=3.21+1.75=5\text{列。}$$

知道股道有效长后，可以确定通过一辆车需要的股道长

度：

$$n=\frac{l_{效}m^*}{N_{到}m}=\frac{850\times 11}{5\times 100}=18.7米/辆。$$

即 在到达场上每辆车需要18.7米线路.

**66** 确定编组站到达场合理负荷。已知：$t_{技}=1$小时；$m^*$；$\rho_{峰}$；$v_{到}$和$v_{峰}$。

**解** 编组站到达场～驼峰看作单通道无限排队系统，合理负荷计算公式〔22〕为

$$\rho_{到}{}^*=\frac{N(t_{技}+t_{待解})}{24m^*},$$

$$t_{待解}=\frac{\rho_{峰}{}^2(v_{到}{}^2+v_{峰}{}^2)}{\lambda(1-\rho_{峰})2}.$$

计算结果列于下表

| $\lambda$ | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^*_{经济}$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 |
| $\rho^*_{到}$ | 0.48 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.49 | 0.53 |

由表可见，到达场合理负荷应为0.48～0.53。

**67** 某到站每昼夜有车流量$n'=450$辆，自编列车由100辆组成。车列平均编组时间$t_{编}=0.5$小时。在车列集结过程中的调车作业时间$t_{附}=0.3$小时。某牵出线编组26列车．试求该到达站需要的调车线长度。

**解** 调车线长度应该满足：集结一列车需要的长度和自车列集结完毕起到该条线路腾空止时间内到达车辆所需要的长度。

在车列占线时间内到达调车线的车辆数为

$$m_{续}=\frac{m t_{占}}{T}.$$

式中　$m$—车列组成辆数。

$t_{占}$—车列占线时间(自车列集结完毕到线路腾空)

$T$—集结周期，$T=\frac{24m}{n'}$，

因而　$$m_{续}=\frac{n' t_{占}}{24}.$$

式中　$n'$—固定某编组线上的车流量，加上10—20%的“天窗”。

因此，编组线的长度为

$$l=ml_{车}+\frac{1.2n' t_{占}}{24}l_{车}.$$

等号左边第一项是保证车列集结需要的长度，第二项是满足续溜车需要的长度。占用编组线的时间：待编和编组时间。待编时间为：

$$t_{待编}=\frac{N' t_{编}(1+v_{编}^{2})}{48-2N' t_{编}},$$

∴　$$l=ml_{车}+\frac{1.2}{24}\left[\frac{N' t_{编}(1+v_{编}^{2})}{48-2N' t_{编}}+t_{编}'\right]l_{车}+l_{附}.$$

式中　$l_{车}$—车辆长度。

$N'$—千出线编组的车流量；

$t_{编}'$—$t_{编}$—$t_{转}$—$t_{返}$。

$t_{返}$—机车自出发线返回千出线需要的时间；

$t_{转}$—车列自编组线转到出发线需要的时间；

$l_{附}$—车列附加长度。

$$l=100\times 8+\frac{1.2\times 450}{24}$$

$$\left[\frac{26\times0.5^2(1+0.4^2)}{48-2\times26\times0.5}+0.3\right]\times8=915\text{米}。$$

**68** 某编组站每昼夜作业量$n=8000$。车列组成辆数$m=100$，即$N_{编}=80$列。根据列车编组计划有到达站$K_{集}=20$个。车列编组时间$t_{编}=0.5$小时，编组时间偏离系数$v_{编}=0.4$，在车列集结过程中予编的时间$t_{编}'=0.3$小时，车站配备三台编组调机，车列集结周期为$T=4$小时，试求续溜车数量。

**解** 由于车流量的波动，在例题〔67〕中求到的编组线长度有时不够。车流量波动幅度一般在$2m_{续}$到零之间，即$m_{续}=\frac{n}{2m}$。这时，一昼夜内需要的附加长度为：

$$m_{附}=\frac{n}{2m}m_{续},$$

则在车列集结周期$T$内有

$$m_{附}=\frac{n}{2m}m_{续}\frac{T}{24}。$$

$$\because\qquad m_{续}=\frac{n't_{占}}{24}=\frac{nt_{占}}{24K_{集}},\quad t_{占}=t_{待编}+t_{编}'。$$

$$\therefore\qquad m_{附}=\frac{\left[\frac{Nt_{编}^2(1+v_{编}^2)}{48-2Nt_{编}}+t_{编}'\right]T}{1152mK_{集}}。$$

式中 $n$—改编列车数量；

$N$—自编列车数；

$K_{集}$—到站数。

$$\therefore\qquad m_{附}=\frac{8000^2\left[\frac{80\times0.5^2(1+0.4^2)}{48\times3-2\times80\times0.5}+0.3\right]\times4}{1152\times100\times20}$$

$$=73\text{辆}。$$

计算表明，为了缓和不均衡作业还需要1股。

**69** 根据列车编组计划。车站编组单组和摘挂列车共17个到站。地方作业车和站修线为二股道。编组线长度与车列长度相适应。车站平均编组85列。全站编组时间平均 $T_{编}=0.35$小时。车列自编组场转到出发场需要$t_{转}=0.15$小时；调机自出发线返回牵出线需要时间 $t_{返}=0.1$小时。在车列集结过程中实行个别车组预编。预编时间占编组时间的0.1。编组场尾部有三条牵出线，三台调机。部分车列的编组作业在驼峰上进行。这些编组作业占用驼峰 $T_{编}^{峰}=4$小时。集结时间的偏离系数$U_{集}=0.75$，编组时间的偏离系数$v_{编}=0.4$。试求编组场股道数量。

**解** 编组场股道数量包括二种股道：技术作业需要股道和附加股道。即

$$m=m_{技}+m_{附}.$$

式中 $m_{技}$—技术作业需要的股道，取决于列车编组计划，股道固定使用方法，编组作业过程，地方作业量和作业性质以及其它需要。

$m_{附}$—附加股道数；每台调机需要的附加股道数量取决于编组系统（待编和编组过程）内的车列数量。

编组系统内车列平均数量可以用排队论计算，即

$$L_{系}=\frac{\rho}{1-\rho}\ \frac{v_{集}^{2}+v_{编}^{2}}{2},$$

或
$$L_{系}^{编}=\frac{\rho_{调}}{1-\rho_{调}}\ \frac{v_{集}^{2}+v_{编}^{2}}{2}.$$

式中
$$\rho_{调}=\frac{N_{编}t_{编}}{24M_{调}}.$$

编组系统内车列数的均方差

$$\sigma_{L_{系}^{编}}=\frac{\sqrt{\rho_{调}}}{1-\rho_{调}}.$$

因而，附加股道数量：$m_{附}=L_{系}+3\sigma_{I.系}^{编}$。

根据编组计划，每个到达站给一股道；二股地方作业车（地方作业车一股，站修一股）。

最少股道数量（技术作业需要的）

$$m_{技}=17+2+1=20股。$$

平均编组时间：$t_{编}=0.35+0.15+0.1=0.6$。

每台调机负荷：

$$\rho_{调}=\frac{N_{编}\left(t_{编}-\dfrac{T_{编}^{峰}}{N_{编}}\right)}{24M_{调}}=\frac{85\left(0.6-\dfrac{4}{85}\right)}{24\times 3}=0.65。$$

$$L_{系}^{编}=\frac{0.65}{1-0.65}\ \frac{0.75^2+0.4^2}{2}=0.67,$$

$$\sigma_{I.系}^{编}=\frac{\sqrt{0.65}}{1-0.65}=2.30,$$

$$\therefore\qquad m_{附}=L_{系}^{编}+3\sigma_{I.系}^{编}=0.67+3\times 2.3=7.57\approx 8股。$$

因而，编组场股道数量$m=20+8$股$=28$股。

**70** 编组站每天到达改编列车 $N=80$列，其中挂结尾车组占 $\gamma=60\%$；车列平均组成辆数 $m=50$；列检组由四个检车组组成。列检作业终了间隔时间的偏离系数$v_{出}=0.76$；驼峰解体间隔$t_{峰}$列于下表。驼峰间隔的偏离系数$v_{峰}=0.4$；驼峰技术作业中断时间$T_{断}=1$小时。在驼峰上进行编组的作业量，以峰上和编尾调机的负荷均匀为依据。$v_{集}=0.7$，$t_{编}=0.48$（方案1，2）；$t_{编}=0.55$（方案3，4）。用编尾调机消除“天窗”时，$v_{编}=0.45$。车一小时费用$C_{车-时}=0.14$元；一台调机工作一天的费用 $C_{调}=180$元/天。全站出发列车作业终了间隔时间的偏离系数：对电力牵引$v_{出}^{电}=0.78$；对内燃牵引$v_{出}^{内}=0.53$。车站有四种可能作业方案（见下表）：

| 方案 | 峰上调机台数 | 编尾调机台数 | 消除“天窗”方式 | 驼峰平均间隔$t_{峰}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 下峰整理 | 0.220 |
| 2 | 3 | 2 | 下峰整理 | 0.195 |
| 3 | 2 | 3 | 编尾连挂 | 0.175 |
| 4 | 3 | 3 | 编尾连挂 | 0.160 |

**解** 驼峰和编尾作业间有密切联系。例如，驼峰进行车列编组；编尾调机连挂车组消除“天窗”。同样，驼峰机车下峰整理消除“天窗”。这些相互联系反映在相应的作业时间 $T_{编}^{峰}$ 和 $T_{编}$（编尾连挂车列时间包括在$T_{编}$内），随着$T_{编}^{峰}$ 的增加，驼峰负荷增加，相应的驼峰间隔时间 $t_{峰}$增加。从而使挂有结尾车组的车列在到达场上停留时间增加，而需要较多的到达线。同样，减少待编时间可以减少编组场附加股道数量。若消除“天窗”作业由编尾调机担当，则增加待编时间，即增加编组场附加股道数量。因此，发生合理分配驼峰和编尾作业量问题，以及合理的驼峰间隔和编尾调机的台数问题。上述不同作业方案的费用在于车列的停留时间的多少。

挂有结尾车组的车列待解时间费用为：

$$E_1 = Nmt_{待解}^{结尾}C_{车-小时},$$

待编时间费用

$$E_2 = Nmt_{待编}C_{车-小时}.$$

峰上和编尾机车作业费用

$$E_3 = M_{峰}C_{峰} + M_{调}C_{调}.$$

每个方案每天的总费用

$$E_{天} = NmC_{车-小时}(t_{待解}^{结尾} + t_{待编}) + M_{峰}C_{峰} + M_{调}C_{调}$$

式中 $N$—每天解体的车列数，

$m$—车列组成辆数，

$C_{车一小时}$—车一小时费用，

$t^{结尾}_{待解}$—挂有结尾车组的车列待解时间，

$t_{待编}$—车列待编时间，

$M_峰$，$M_调$—分别为峰上和编尾调机台数，

$C_峰$，$C_调$—分别为峰上和编尾调机费用．

计算结果列于表(10.2)．由表(10.2)可见，第3方案最利．

**表10.2**

| 方案编号 | 驼峰负荷 | 编尾调机负荷 | $t^{结尾}_{待解}$ | $t_{待编}$ | 驼峰间隔 $t_r$ | 每天换算费用（元） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 等待费用 | 机车费用 | 总费用 |
| 1 | 0.80 | 0.775 | 0.136 | 0.55 | 0.240 | 770 | 720 | 1490 |
| 2 | 0.77 | 0.750 | 0.120 | 0.46 | 0.230 | 648 | 900 | 1548 |
| 3 | 0.61 | 0.610 | 0.065 | 0.30 | 0.183 | 410 | 900 | 1310 |
| 4 | 0.61 | 0.580 | 0.065 | 0.25 | 0.183 | 354 | 1080 | 1434 |

**71** 编组站每昼夜集结75列车．平均编组时间为0.5小时．集结时间偏离系数：当一台调机时$v_集=1$；二台调机时，$v_集=0.8$；三台调机时，$v_集=0.7$；四台调机时，$v_集=0.65$．编组时间偏离系数$v_编=0.4$．试问：从编组场和牵出线能力协调出发，编尾应配备几台调机．如果已知调机一小时费用$C_{调机一小时}=9$元；车辆一小时费用$C_{车一小时}=0.3$元；车列组成辆数$m=50$辆．试求合理的调机台数．

**解** 协调条件：$\rho_调<1$，即$\rho_调=\dfrac{N_集 t_编}{24M_调}<1$．

或 $$M_调>\frac{N_集 t_编}{24}=\frac{75\times0.5}{24}\approx2台．$$有二台就能满足．

大家知道增加调机可以减少车列待编时间但成本也增加了．合理的调机台数应是：调机费用和待编费用最少．

每昼夜它们的费用为

$$E = N_{集} m t_{待编} C_{车一小时} + 24 M_{调} C_{调机一小时}.$$

式中 $t_{待编} = \dfrac{\rho_{调}(v_{集}^2 + v_{编}^2)}{2(1-\rho_{调})} t_{编}$.

当$M_{调}=2$台时，$\rho_{调} = \dfrac{75 \times 0.5}{24 \times 2} = 0.78$,

当$M_{调}=3$台时，$\rho_{调} = \dfrac{75 \times 0.5}{24 \times 3} = 0.52$,

当$M_{调}=4$台时，$\rho_{调} = \dfrac{75 \times 0.5}{24 \times 4} = 0.39$.

车列待编时间：

$M=2$，$t_{待编} = \dfrac{0.78(0.8^2 + 0.4^2)}{2(1-0.78)} \times 0.5 = 0.71$小时。

$M=3$，$t_{待编} = \dfrac{0.52(0.7^2 + 0.4^2)}{2(1-0.52)} \times 0.5 = 0.18$小时。

$M=4$，$t_{待编} = \dfrac{0.39(0.65^2 + 0.4^2)}{2(1-0.39)} \times 0.5 = 0.19$小时。

现在求每天费用：

$M=2$ $E=1253$元，

$M=3$ $E=863$元。

$M=4$ $E=1077$元。

显然，配备三台调机最合理。

**72** 某站每天编组80列，平均编组时间$t_{编}=0.5$小时，其偏离系数$v_{编}=0.4$，已知车一小时费用$e_{车一小时}=7$元；机车小时费用为$e_{机车一小时}=6$元试求调机台数？

**解** 在编组线上集结完毕的车列是系统的顾客，相应牵出线上的调机为服务员。

确定牵出线数量和调机台数是站场设计的重要问题。设计参数取决于车列集结和编组的不均衡程度。当车列集结终了时刻，调机不空，车列排队等待编组。当编组时间为任意分布时，待编时间

$$W_{队}=t_{待编}=\frac{\rho_{牵}^{2}(1+v_{编}^{2})}{2(1-\rho_{牵})}.$$

$\because$ $$\rho_{牵}=\frac{N' t_{编}}{24},$$

$\therefore$ $$W_{队}=\frac{N' t_{编}(1+v_{编}^{2})}{48-2N' t_{编}}.$$

式中　$N'$—牵出线固定的调车线上集结的车列数；

$t_{编}$——一台调机编组一列车需要的时间，包括：编组时间，转线时间和调机返回牵出线需要的时间。

$v_{编}$—$t_{编}$的偏离系数。

如果配备$M$台调机，则 $N'=\frac{N}{M}$ 于是上式为

$$W_{队}=\frac{Nt_{编}^{2}(1+v_{编}^{2})}{48M-2Nt_{编}}.$$

由此可见，增加调机数目，增加投资，但减少待编时间。即减少编组费用。

一昼夜内调机及乘务员所需要的费用：

$$E_{调机}=24Me_{机-时}.$$

一昼夜待编时间所需要的费用

$$E_{待编}=NW_{队}e_{车-时}=N\frac{Nt_{编}^{2}(1+v_{编}^{2})}{48M-24t_{编}}e_{车-时}$$

式中　$e_{机-时}$，$e_{车-时}$——分别为机车一小时和车列一小时的费用。

总费用为$E=24Me_{机-时}+\frac{N^2t_{编}^2(1+v_{编})}{48M-2Nt_{编}}$。

为了求合理的调机台数，对上式中的$M$进行一次微分，并使之等于零，经整理后，得：

$$M_{合理}=\frac{Nt_{编}}{24}+\frac{Nt_{编}}{24}\sqrt{\frac{1}{2}(1+v_{编}^2)\frac{e_{车-时}}{e_{机-时}}}$$

$$=\frac{80\times0.5}{24}+\frac{80\times0.5}{24}\sqrt{\frac{1}{2}(1+0.4^2)\frac{7}{6}}$$

$$=3(台)$$

计算表明，如果车列均衡集结，只需要调机1.67≈2台，但由于集结的不均衡，从经济合理性出发，尚需增加1.37台，因而总共需要调机 3 台。

**73** 确定调机的合理负荷，若已知：调车一小时费用：$e_{车-小时}=7$元，机车一小时费用：$e_{机车-小时}=6$元，编组时间偏离系数$v_{编}=0.5$，$\alpha_{编}=0.4$。

**解** 编组调机花费的时间包括二个部分：在车列集结过程中的调车作业需要的时间和车列集结完毕后所需要的调车时间。所以，牵出线上调机的负荷为：

$$\rho_{牵}=\frac{Nt_{编}+Nt_{附}}{24M}$$

式中 $t_{附}$—在车列集结过程中的调车作业时间用$\alpha_{编}=\frac{t_{附}}{t_{编}}$表示，则$t_{附}=\alpha_{编}t_{编}$。

∴ $$\rho_{牵}=\frac{Nt_{编}(1+\alpha_{编})}{24M}.$$

而 $$M=\frac{Nt_{编}}{24}+\frac{Nt_{编}}{24}\sqrt{\frac{1}{2}(1+v_{编}^2)\frac{e_{车-小时}}{e_{机车-小时}}},$$

$$\therefore \quad \rho_{牵}=\frac{1+\alpha_{编}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+v_{编}^{2})\frac{e_{车一小时}}{e_{机车一小时}}}}$$

$$=\frac{1+0.4}{1+\sqrt{0.5(1+0.5^{2})\frac{7}{6}}}=0.75.$$

即在上述条件下，牵出线调机的储备能力不能小于25%．否则不能满足车列集结不均衡的需要

**74** 已知：$N=110$列；$m=100$辆；集结参数$C=11$；到站数目$k=37$．编组场有39股，$l_{效}=850$米．试确定车辆在编组场上需要的线路长度？

**解** 集结的车辆数为

$$R_{集}=\frac{N\cdot mt_{集}}{24}(辆)=\frac{110\times100\times3.7}{24}=1696辆,$$

$$t_{集}=\frac{KC}{N}(小时)=\frac{37\times11}{110}=3.7小时,$$

$$\therefore \quad n=\frac{l_{效}\times m_{编}}{R_{集}}=\frac{850\times39}{1696}=19.5米/辆.$$

因此，在编组场上每辆车需要19.5米．

**75** 求编组站牵出线合理数量．车列编组过程可以看作单通道排队服务过程．编组牵出线和调机为服务员．编组时间为服务时间．增加牵出线数目可以减少车辆待编时间，但要增加工程投资．合理的牵出线数目为两者费用之和最少．或计算还本期小于标准还本期合理的牵出线数目$M^*$．

牵出线数目 $M=\dfrac{N_{编}t_{编}}{1440}$．

这时， $\rho_1=\dfrac{N_{编}t_{编}}{24M}$．

待编时间 $t'_{待编}=\dfrac{\rho_1(v_集+v^2_{编})t_{编}}{2(1-\rho_1)}=\dfrac{N_{编}t^2_{编}(v_集+v^2_{编})}{2(24M-N_{编}t_{编})}$.

如果增加一条牵出线，则系统负荷为

$$\rho_2=\frac{N_{编}t_{编}}{24(M+1)}.$$

待编时间为 $t''_{待编}=\dfrac{N_{编}t^2_{编}(v^2_{集}+v^2_{编})}{2(24(M+1)-N_{编}t_{编})}$,

$$\therefore\quad \Delta t_{待编}=t'_{待编}-t''_{待编}$$

$$=0.5t^2_{编}(v^2_{集}+v^2_{编})\left[\frac{1}{24M-N_{编}t_{编}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{24(M+1)-N_{编}t_{编}}\right].$$

期望费用函数为

$$E_{编}=365N_{编}\Delta t_{待编}C_{列-小时}.$$

工程投资还本期为

$$t_{还}=\frac{K_{牵}+K_{机}}{E_{编}-\ni_{机}-\ni_{车}}.$$

如果计算还本期小于标准还本期(10年)，那么，调机数目是合理的.

**76** 求调车设备驼峰需要的能力、增加驼峰能力可以减少车列待解时间，但要增加驼峰造价. 我们的目的是使两者的费用最少. 即

$$\Delta t_{待解}=t'_{待解}-t''_{待解}.$$

而 $$t'_{待解}=\frac{N^2t^2_1(v^2_{到}+v^2_{解})}{2(24-Nt_1)[24v_{到}(24-Nt_1)]},$$

$$t''_{待解}=\frac{N^2t^2_2(v'_{到}+v^2_{解})}{2(24-Nt_2)[24v_{到}(24-Nt_2)]},$$

式中　$N$——一昼夜内解体的列车数；

$t_1$，$t_2$—分别为加强驼峰能前、后的解体时间；

$v_{到}$，$v_{解}$—分别为列车到达间隔时间和解体时间的偏离系数。

因而年期望费用方程为：

$$E_{年}=365N\Delta t_{待解}C_{车-小时}.$$

式中　$C_{车-小时}$—列车停闲一小时的费用。

现在求还本期

$$t_{还}=\frac{K_{峰}}{E_{年}-Э_{年}}.$$

式中　$K_{峰}$—驼峰造价；

$Э_{年}$—驼峰运管费用。

如果$t_{还}$少于10年，则驼峰能力是合适的。

**77**　确定出发场合理股道数量。编组站出发场可以看作多个单通道排队系统。按[22]，导出的期望费用最小的方程得到经济上有利的股道数量计算公式

$$m_{发经济}=\ln\left[\frac{-K_{换}(1-\rho)}{(v_{转}^2+v_{发}^2)(4380\Delta e+0.5K_{换})\rho\ln\rho}\right](\ln\rho)^{-1}+\frac{0.75N}{24}.$$

式中　$K_{换}$—铺一股出发线的换算费用；

$\rho$—出发区间负荷；

$v_{转}$，$v_{发}$—车列转线时间和出发时间的偏离系数。

$\Delta e$—车列待发一小时的费用；

$N$——一昼夜内出发的列车数。

如果$v_{转}=1.0$；$v_{发}=0.8$；$e=0.75$，0.8，0.85；

$K_{换编}=51,500$元　把得到的结果列于下表

| $N$（列） | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^{*}_{发经济}$ | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 |

**78**　求出发场的合理负荷．按[22]．合理负荷公式：

$$\rho^{*}_{发}=\frac{N(t_{技}+t_{待发})}{24m^{*}}=\frac{\lambda_{发}(t_{技}+t_{待发})}{m^{*}},$$

$$t_{待发}=\frac{\rho^{2}(1+v^{2}_{发})}{2\lambda_{发}(1-\rho)}.$$

式中　$t_{技}$—技术作业占线时间，取0.75小时；

$v_{发}$—发车时间的偏离系数，取0.8；

$\rho$—区间负荷，取0.75，0.8，0.85，

计算结果列于下表

| $\lambda_{发}$ | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m^{*}_{经济}$ | 7 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| $\rho^{*}_{经济}$ | 0.42 | 0.48 | 0.47 | 0.51 | 0.50 | 0.54 | 0.58 | 0.56 |

由表可见，出发场的合理负荷在0.42～0.58之间．

**79**　已知：每昼夜平均发车量$N$，延误发车平均时间$t_{延}$和延误车小时费用$e_{车-时}$．试求编组站出发场合理股道数量．

**解**　编组站出发场有两个功能：

（1）满足车列出发作业的需要；

（2）车列密集组成时的需要．

显然，增加出发场股道，会增加投资，但可减少等待转线时间的费用．合理的股道数量，两者的费用之和最少．费用方程为

$$E=365Ne_{车-时}t_{延}+K_{换}m$$

而 $$t_{延}=\frac{\rho_{发}(1+v_{发}^2)}{2\lambda(1-\rho_{发})}.$$

式中 $\rho_{发}$—出发区间负荷；$\rho_{发}=\frac{\text{实际发车数}}{\text{区间能力}}$.

$v_{发}$—列车出发间隔时间的偏离系数。

∴ $$E=365Ne_{车-时}\frac{\rho_{发}^{m+1}(1+v_{发}^2)}{2\lambda(1-\rho_{发})}+K_{换}m.$$

为了求合理的$m$，对上式中$m$求导数，并使为0。

得 $$m=\ln\left[\frac{-K_{换}}{182.5e_{车-时}(1+v_{发}^2)\frac{24}{1-\rho_{发}}\rho_{发}\ln\rho_{发}}\right]$$

$$\cdot(\ln\rho_{发})^{-1}.$$

**80** 根据延误概率求出发场股道数量。

设延误发车的概率不大于0.05。

**解** 延误概率为

$$P_{延}=\frac{\rho_{发}^{m+1}(1+v_{发}^2)}{2}.$$

两边取对数，得

$$(m+1)\ln\frac{(1+v_{发}^2)\rho_{发}}{2}=\ln P_{延}.$$

∴ $$m=\frac{\ln[P_{延}]}{\ln\left[\frac{1+v_{发}^2}{2}\rho_{发}\right]}-1.$$

**81** 选择改造编组站到达场和驼峰的合理方案。已知：每昼夜驼峰解体$N=80$列，列检作业时间$t_{列}=0.5$小时；车列解体时间的偏离系数$V_{峰}=0.4$；每列车小时$e_{列时}=10$元，停车一

次的费用为 $e_0=4$元。每车列小时$e_{车时}=10$元，改造方案指标如下表：

| 方案指标 | 初始方案 | 到达场 | | | | | 驼峰 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 改造方案(股道数量) | | | | | 改造方案(解体间隔) | | | |
| | $m_0=4$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $t_{峰}=0.25$ | 0.23 | 0.21 | 0.17 |
| 投资 | 0 | 80 | 170 | 250 | 680 | 890 | 0 | 400 | 960 | 1800 |
| 增加的设备的基本折旧与日常维修费 | 0 | 4.2 | 8.4 | 12.6 | 16.8 | 21.0 | 0 | 32 | 48 | 132 |
| 换算费用 | 0 | 13.8 | 28.8 | 42.6 | 97.4 | 127.8 | 0 | 80.0 | 163.2 | 348 |

**解**　合理方案的条件是总换算费用最少。总换算费用包括：

$$\sum E^i_{换}=E^i_{解}+E^i_{延}+E^i_{停}+E^i_{换}\Rightarrow \min.$$

式中　$E^i_{解}$—按第$i$个改造方案，每年车列解体费用；

$E^i_{延}$—延误接车费用；

$E^i_{停}$—停车费用；

$E^i_{换}$—第$i$方案增加设备的建筑、运管费用。

计算 $E^i_{解}$，$E^i_{延}$，$E^i_{停}$可按〔6〕公式计算．即

$$\sum E^i_{换}=365Ne_{列时}\left[t_{列}+\frac{\lambda t^2_{峰}(1+v^2_{峰})}{2(1-\lambda t_{峰})}+t_{峰}\right]$$

$$+365N\Delta e_{车时}\times\frac{\rho^{m+1}(1+v^2_{峰})}{2\lambda(1-\rho)}$$

$$+365Ne_0\frac{\rho^{m+1}(1+v^2_{峰})}{2}+E^i_{换}. \qquad (*)$$

式中　$N$——昼夜内驼峰解体车列数；

$e_{列时}$—1个车列小时的费用；

$\lambda$—每小时到达解体的列车数；

$\rho$—驼峰负荷水平；$\rho=\dfrac{Nt_{峰}}{24}$.

为了使函数（＊）达到最优，把驼峰和到达场改造方案列成矩阵形式：

$$A=\left|\begin{matrix}0.25 & 0.23 & 0.21 & 0.17\\ 4 & 567 & 8 & 9\end{matrix}\right\|\begin{matrix}\text{驼峰}\\ \text{到达场}\end{matrix}$$

$$\lambda=\frac{80}{24}=3.33\text{列/时；}\quad \rho_0=\frac{80\times0.25}{24}=0.83\text{；}$$

$$\rho_1=0.77\text{；}\ \rho_2=0.70\text{；}\ \rho_3=0.57\text{。}$$

第一步：固定股道数 $m=4$；变化驼峰解体间隔 $t_{峰}$：$t_{峰}=0.25$，则

$$\sum E_{换}=365\times80\times10\left[0.5+\frac{3.33\times0.25^2(1+0.4^2)}{2(1-3.33\times0.26)}+0.25\right]+365\times80\times10\frac{0.83^{4+1}(1+0.4^2)}{2\times3.33(1-0.83)}$$

$$+365\times80\times4\,\frac{0.83^{4+1}(1+0.4^2)}{2}+0\approx727000\text{元。}$$

第二步：$m=4$，$t_{峰}=0.23$　$\sum E_{换}=564000$元。

第三步：$m=4$，$t_{峰}=0.21$　$\sum E_{换}=530000$元。

第四步：$m=4$，$t_{峰}=0.17$　$\sum E_{换}=607000$元。

当第四步时，费用增加，因而固定$t_{峰}=0.21$改变股道数量$m$。进行第二周期计算。

第一步：$t_{峰}=0.21$，$m=5$；$\sum E_{换}=529000$元。

第二步：$t_{峰}=0.21$，$m=6$；$\sum E_{换}=534000$元。

计算可见，$t_{峰}=0.21$，$m=5$时，费用最少、为了检驼，再增加一步计算：

$m=6$，$t_{峰}=0.25$，$\sum E_{换}=701800$元。

$m=6$，$t_{峰}=0.23$，$\sum E_{换}=554800$元。

$m=6$，$t_{峰}=0.17$，$\sum E_{换}=626000$元。

可见所需费用都大于方案：$m=5$，$t_{峰}=0.21$。因此，决定改造方案为增加1股到达线，增加一股溜放线和一台调机（使$t_{峰}$由0.25降到0.21）。

**82** 如果国家投资只有$B=700000$元，则上例应如何改建，才是合理的？

**解** 本例计算同上例，不过每一步都要用下式验算：

$$\sum_{j=1}^{n} k_j^i \leqslant B \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

式中 $\sum k_j^i$—采用第$i$改建方案时需要的总投资；

$k_j$—采用第$j$种作业方式时的投资.

计算步骤和结果列于下表。由表可见，最优方案是$m=7$，$t_{峰}=0.23$。

| 计算周期 № | 计算步数 № | 被优化的变数 | | $\sum_{i=1}^{2} k_j^i$（千元） | $\sum E_{换}^i$（千元） |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 到达场股道数量 | 驼峰解体间隔 | | |
| 1 | 1 | 4 | 0.25 | 0<700 | 727.0 |
| | 2 | | 0.23 | 400<700 | 564.0 |
| | 3 | | 0.21 | 960>700 | — |
| 2 | 1 | 5 | 0.23 | 480<700 | 556.8 |
| | 2 | 6 | | 570<700 | 554.8 |
| | 3 | 7 | | 650<700 | 554.6 |
| | 4 | 8 | | 1080>700 | — |
| 检验步骤 | 1 | 8 | 0.26 | 680<700 | 729.4 |
| | 2 | | 0.23 | 1080>700 | — |

因此，在到达场增加三股道，驼峰改建成$t_{峰}=0.23$时。

**83** 试求货场卸车线合理长度。已知资料如下：

$a$）车辆成组到达；

$b$）货场有固定的工作制度；

c) 货场每昼夜平均作业车有 $m_0=30$ 辆，其偏离系数 $v=0.4$；车辆平均静载重 $g=30TC$；车站每次送车延续时间 $t_{送}=0.5$小时；1个机车小时的费用$e_{机时}=6.5$元；1个车辆小时的费用$e_{车时}=0.15$元；铺设一米线路的费用$k_n=40$元；线路年折旧和日常维修费用为建筑费的 $\alpha_n=6\%$；货场采用的卸车机器购置费$k=40000$元，其生产能力为$\Pi=60$吨/时。

d) 工人计件工资。

**解** 卸车机在正常稳态作业条件下的合理卸车线长度：$L=2l_n+l_Л$。

式中 $l_Л$—机车长度。

$$l_n=\frac{Nl}{x}.$$

$l$—车辆长度。

装卸线合理长度必须是总费用最少。这些费用是 $E_{总}=E_1+E_2+E_3+E_4+E_5$。

式中 $E_1$—装卸机械的年折旧和日常维修费，$E_1=k_{卸}(\alpha+E)z$；

$E$—投资效益系数；

$k_{卸}$—装卸机械购置费；

$\alpha$—年折旧维修系数；

$z$—装卸机械数目；

$E_2$—车辆装卸停留时间

$$E_2=365Ne_{车\text{-}时}\left(\frac{N}{xz\Pi}+t_{送}x\right).$$

$E_3$—调车费用

$E_3=365xt_{送}e_{机\text{-}时}$.

$E_4$—车辆集结费用

$$E_4=\frac{N(1+v^2)}{x}\times 4380e_{车时}.$$

$E_5$—线路折旧维修费用

$$E_5=2\frac{Nlk_{卸}}{x}(\alpha_n+E).$$

$\alpha_{\Pi}$—线路年折旧系数；

$$E_{总}=a_1z+\frac{a_2}{xz}+a_3x+\frac{a_4}{x}.$$

式中 $a_1=k_{卸}(\alpha+E)$； $a_2=\frac{365N^2ge_{车时}}{\Pi}$；

$a_3=365t_{送}(e_{机时}+Ne_{车时})$； $a_4=N(1+r^2)4380e_{车时}+2Nlk_{卸}(\alpha_{\Pi}+E)$.

把数值代入得：

$a_1=40000(0.1+0.12)=8800$；

$a_2=\frac{365\times 100^2\times 30\times 0.15}{60}=273750$；

$a_3=365\times 0.5(6.5+100\times 0.15)=3924$；

$a_4=100(1+0.4^2)\times 4380\times 0.15+2\times 100\times 8\times 40(0.06+0.12)=87732$；

$$E_{总}=8800z+\frac{273750}{xz}+3924x+\frac{87732}{x},$$

或 $$E'_{总}=z+\frac{31.1}{xz}+0.45x+\frac{9.97}{x}.$$

因为最少需送车3次，所以$x_{min}=3$.

装卸机械最少台数：$\frac{N\cdot g}{(T_{计}-t_{送}x)\Pi}=\frac{100\times 30}{(24-0.5\times 3)60}\approx 3$

为了求最优送车次数$x$和合理装卸机械数目，我们先固定$x=3$，变换装卸机械数目$z$，并计算总费用：

第一步：$x=3$，$z=3$；

$$E'_{总}=3+\frac{31.1}{3\times3}+0.45\times3+\frac{9.97}{3}=11.128.$$

第二步：$x=3$，$z=4$；

$$E'_{总}=11.264.$$

由此可见，$x=3$时，$z$不能用4.

但用$z=3$，$x=4$，5，6，7，8，计算总费用的结果：

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E^1_{总}$ | 11.128 | 9.884 | 9.317 | 9.089 | 9.055 | 9.142 |

由表可见$x=7$，总费用最少。

第三步：把$x=7$固定，变更$z=3$，4。总费用增加。由表可知，$x=7$，$z=3$时最优，我们增加一步计算，即$x=8$，$z=4$。这时$E'_{总}=9.818$。因而$x=7$，$z=3$为最优方案，因此，$L_{\Pi}=259$米。

**84** 设顾客按泊松流来到服务系统，其强度为$\lambda$；服务时间服从两阶爱尔朗分布，平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$，即两个独立的随机变数之和，它们是相同的指数分布，服务强度为$\mu'$。根据数学期望加法定理，

$$\frac{1}{\mu'}+\frac{1}{\mu'}=\frac{1}{\mu}.$$

从而 $\mu'=2\mu$

因此，服从两阶爱尔朗分布的服务时间$T_{服}$，它的数学期望为$\frac{1}{\mu}$，可能表示为两个独立的随机变数$T^{(1)}_{服}$和$T^{(2)}_{服}$之和，每个指数分布的参数都是$2\mu$。$T^{(1)}_{服}$和$T^{(2)}_{服}$可以表示服务过程的两个位相。

这种模型的生、灭图，如下图所示

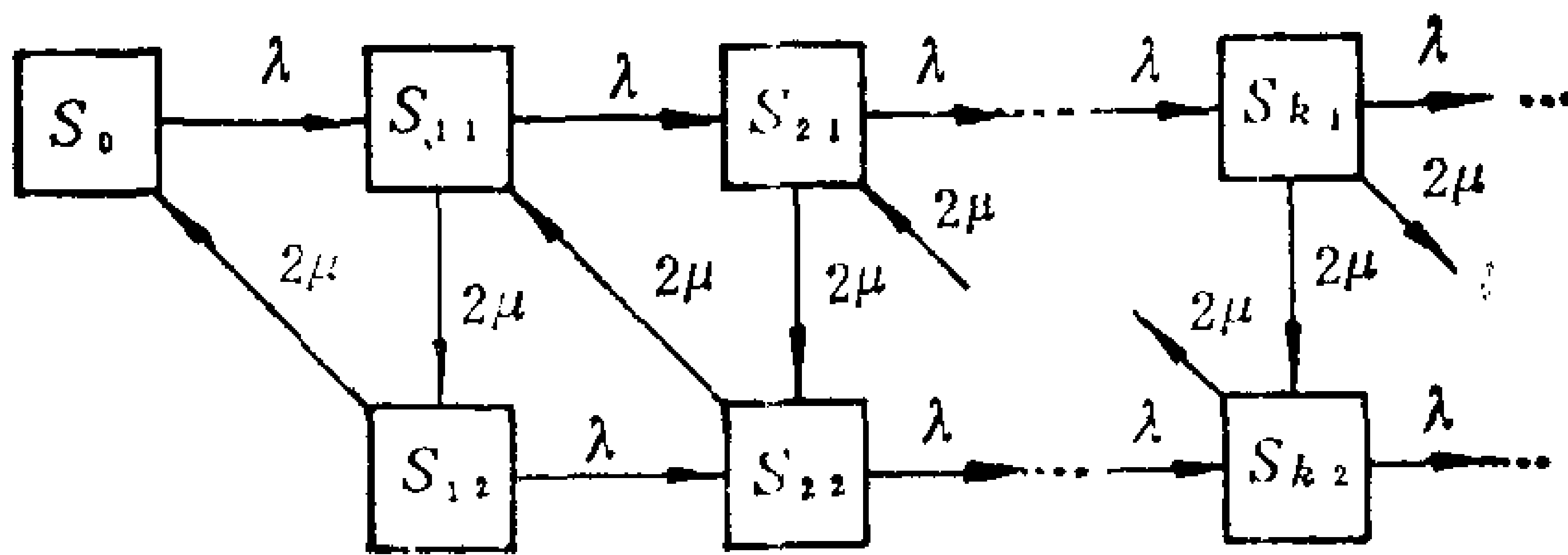



图10.1

图中： $S_0$—系统中没有顾客(服务没有开始)；

$S_{1,1}$—系统内有一个顾客，在第一位相接受服务，没有顾客排队；

$S_{1,2}$—系统内有一个顾客，在第二位相接受服务，没有顾客排队；

$S_{2,1}$—系统内有两个顾客，第一个顾客在第一位相接受服务，第二个顾客在排队；

$S_{2,2}$—系统内有两个顾客，第一个顾客在第二相接受服务，第二个顾客在排队.

……………………………

$S_{k,1}$—系统内有$k$个顾客，第一个顾客在第一相接受服务，其余顾客在排队；

$S_{k,2}$—系统内有$k$个顾客，第一个顾客在第二相接受服务，其余顾客排队.

……………………………

自$S_0 \to S_{1,1}$顾客流的强度为λ.系统状态自$S_{1,1}$转移到$S_{1,2}$.时强度为2μ。自$S_{1,2} \to S_0$的强度也是2μ，…(见生、灭图)。

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，有：

$$\lambda P_0 = 2\mu P_{1,2},$$

$$(\lambda + 2\mu)P_{1,1} = \lambda P_0 + 2\mu P_{2,2}.$$

$$(\lambda+2\mu)P_{1,2}=2\mu P_{1,1},$$
$$(\lambda+2\mu)P_{2,1}=\lambda P_{1,1}+2\mu P_{3,2},$$
$$(\lambda+2\mu)P_{2,2}=\lambda P_{1,2}+2\mu P_{2,1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda+2\mu)P_{k,1}=\lambda P_{k-1,1}+2\mu P_{k+1,2},$$
$$(\lambda+2\mu)P_{k,2}=\lambda P_{k-1,2}+2\mu P_{k,1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

或 $\dfrac{\lambda}{\mu}=\rho$ 代入，得：

$$\rho P_0=2P_{1,2},$$
$$(\rho+2)P_{1,1}=\rho P_0+2P_{2,2},$$
$$(\rho+2)P_{1,2}=2P_{1,1}$$
$$(\rho+2)P_{2,1}=\rho P_{1,1}+2P_{3,2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\rho+2)P_{k,1}=\rho P_{k-1,1}+2P_{k+1,2},$$
$$(\rho+2)P_{k,2}=\rho P_{k-1,2}+2P_{k,1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

本题有无限个方程式．即有无限个未知数$P_0$，$P_{1,1}$，$P_{1,2}$，$P_{2,1}$，$P_{2,2}$，…．因此，这种方程的解，只当$\lambda$和$\mu$有具体的数值．当状态概率方程很多时，可以用逼近解法(近似)。这种非马尔可夫问题有时可以转化成马尔可夫过程求解．

**85** 设系统 $S$（技术装备）在最简单流的作用下，可能发生故障，一旦发生故障，立即排除，排除故障时间服从三阶爱尔朗分布．故障发生的强度为$\lambda$．求状态极限概率？

**解** 本系统为$M|E_3|1$型．它是非马尔可夫过程．我们用马尔可夫过程来代替它．

排除故障时间$T$是随机变数．它服从三阶爱尔朗分布，即

$$f_3(t)=\frac{\mu(\mu t)^2}{2}e^{-\mu t}\quad (t>0),$$

或 $\qquad T=T_1+T_2+T_3,$

且 $T_1$，$T_2$，$T_3$都服从指数分布。它们的强度都是$\mu$；即

$$f_1(t)=\mu e^{-\mu t}\quad (t>0).$$

系统$S$的实际可能状态有两个：

$S_1$—设备正常；

$S_2$—设备有故障。

系统状态转移图如图所示：它是循环式图形。因为自状态

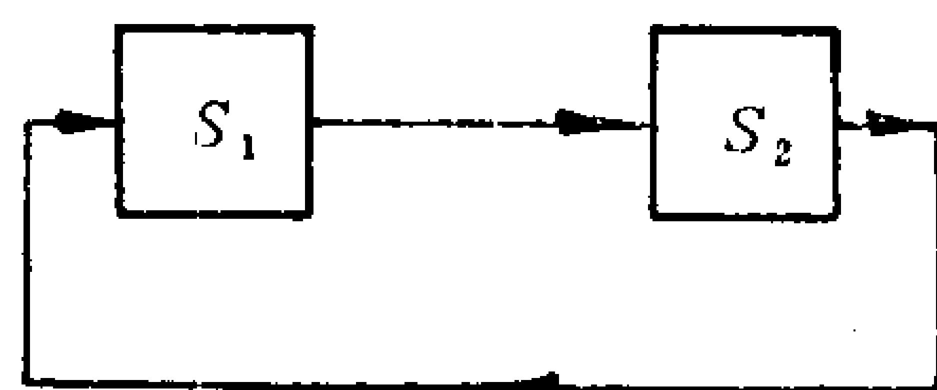



图10.2

$S_2$转移到$S_1$时，不是最简单流，因而，不能列出微分方程或代数方程。但我们可以人为地把循环过程中的$S_2$分解成三个顺次的“近似状态”。即

$S_2^{(1)}$—开始修理；

$S_2^{(2)}$—正在修理；

$S_2^{(3)}$—修理完毕。

或者说，把排除故障分为三个阶段，而每个阶段，系统的逗留时间服从指数分布。这时，系统状态转移图为：

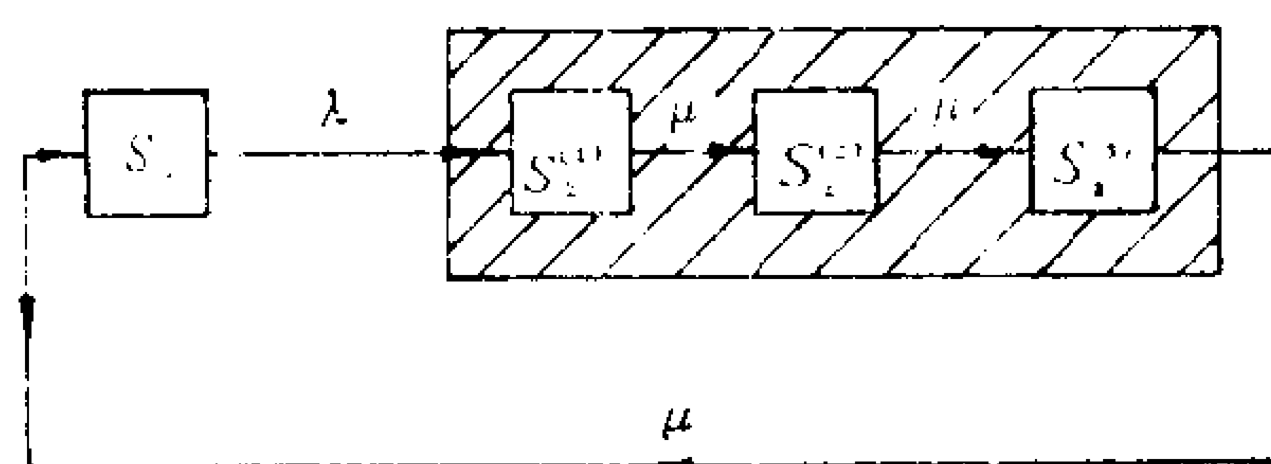



图10.3

图中，一个状态$S_2$用三个近似状态$S_2^{(1)}$，$S_2^{(2)}$和$S_3^{(3)}$表示。这样把非马尔可夫过程近似地看作马尔可夫过程。用$P_2^{(1)}$,$P_2^{(2)}$和$P_2^{(3)}$表示近似状态$S_2^{(1)}$，$S_2^{(2)}$和$S_2^{(3)}$的极限概率。于是出现

$$P_2=P_2^{(1)}+P_2^{(2)}+P_2^{(3)}.$$

令 $\bar{t}_1=\frac{1}{\lambda}$，$\bar{t}_2=\frac{1}{\mu}$。这样可以写出状态的极限概率：

$$P_1=\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1+\bar{t}_2+\bar{t}_2+\bar{t}_2}=\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1+3\bar{t}_2},$$

$$P_2^{(1)}=P_2^{(2)}=P_2^{(3)}=\frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1+3\bar{t}_2},$$

$$P_2=P_2^{(1)}+P_2^{(2)}+P_2^{(3)}=\frac{3\bar{t}_2}{\bar{t}_1+3\bar{t}_2}.$$

这里 $3\bar{t}_2$就是修理时间，它等于每个修理阶段的时间之和。

因为 $\bar{t}_1=\frac{1}{\lambda}$, $\bar{t}_2=\frac{1}{\mu}$;

所以 $P_1=\frac{\mu}{\mu+3\lambda}$; $P_2=\frac{3\lambda}{\mu+3\lambda}$.

**86** 设机械系统$S$由两台型号相同的机床组成。在最简单流（故障流）的作用下，机床停止工作。其强度为λ。有故障的机器立即得到修理，如果修理时间服从两阶爱尔朗分布。

即 $f_2(t)=\mu^2te^{-\mu t}$ $(t>0)$

求系统状态的极限概率。

**解** 系统有三个可能状态：

$S_0$—两台机床都在工作；

$S_1$——一台工作，一台发生故障；

$S_2$—两台都发生故障。

我们把修理过程分成二步：开始修理和修理完毕。每一步的修理时间服从指数分布。

$f_1(t)=\mu e^{-\mu t}$ $(t>0)$.

如果系统中引入下列“伪状态”，则把非马尔可夫过程转变成马尔可夫过程。

$S_1^{(1)}$——一台工作，一台开始修理；

$S_1^{(2)}$——一台工作，一台修理完毕；

$S_2^{(1;1)}$—两台都开始修理；

$S_2^{(1,2)}$——一台开始修理，另一台修理完毕；

$S_2^{(2,2)}$——两台都修理完毕。

系统状态转移图如图所示。

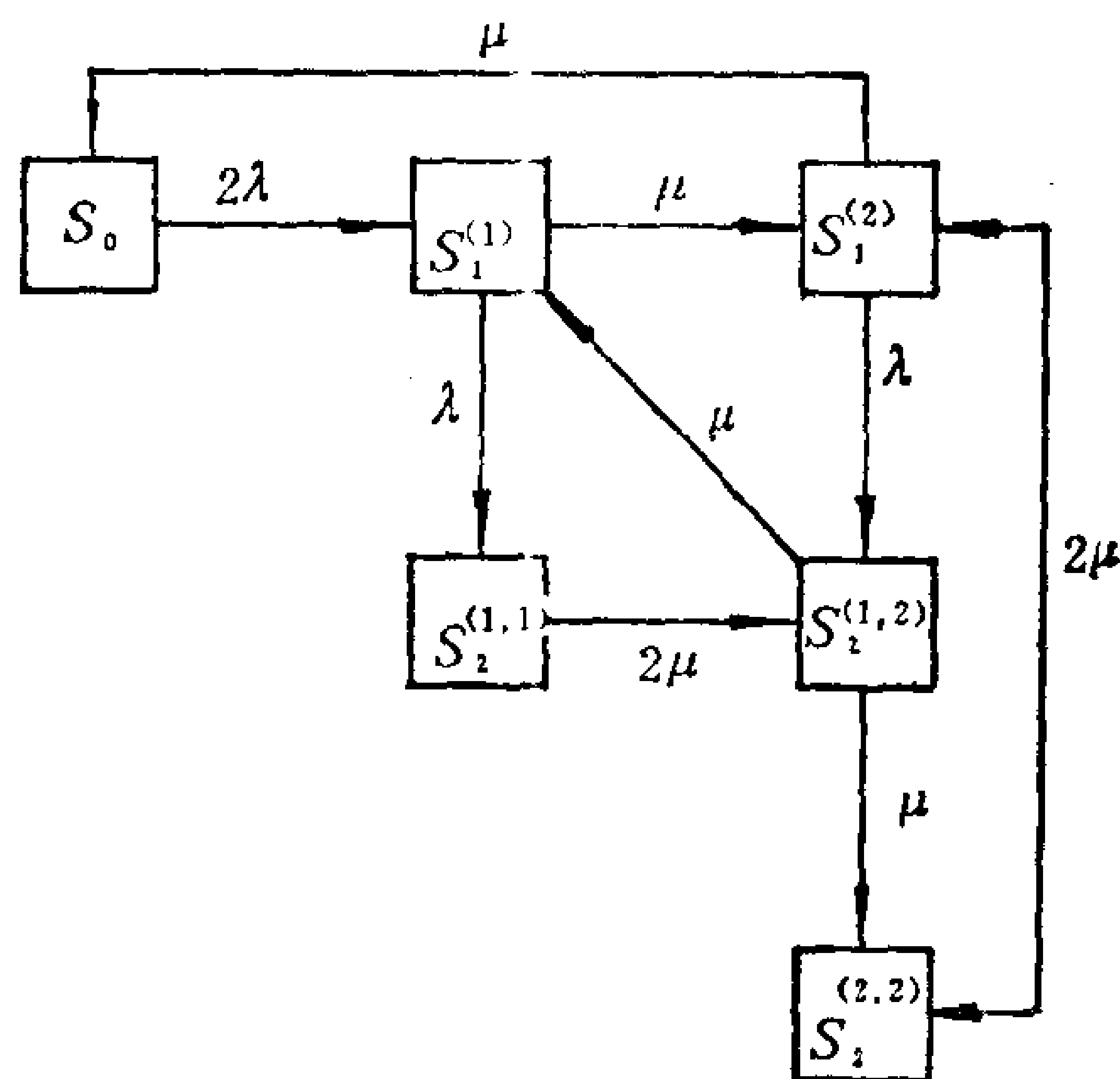



图10.4

图中箭头线自$S_2^{(1,1)}$到$S_2^{(1,2)}$和$S_2^{(2,2)}$到$S_1^{(2)}$的强度不是$\mu$而是$2\mu$。这是因为转移到下一步（修理完毕）修理的机床可以是两台中的任意一台。

系统状态极限概率方程：

$$\left.\begin{aligned}
2\lambda P_0 + \mu P_2^{(1,2)} &= (\lambda+\mu)P_1^{(1)},\\
\mu P_1^{(1)} + 2\mu P_2^{(2,2)} &= (\lambda+\mu)P_1^{(2)},\\
\lambda P_1^{(1)} &= 2\mu P_2^{(1,1)},\\
2\mu P_2^{(1,1)} + \lambda P_1^{(2)} &= 2\mu P_2^{(1,2)},\\
\mu P_2^{(1,2)} &= 2\mu P_2^{(2,2)},\\
\mu P_1^{(2)} &= 2\lambda P_0,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

由（1）式中的第三、五和第六个方程式有：

$$
\left.\begin{aligned}
P_2^{(1,1)} &= \frac{\lambda}{2\mu} P_1^{(1)}, \\
P_2^{(2,2)} &= \frac{1}{2} P_2^{(1,2)}, \\
P_1^{(2)} &= \frac{2\lambda}{\mu} P_0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

把（2）代入（1）中其余三个方程中，得

$$
\left.\begin{aligned}
2\lambda P_0 + \mu P_2^{(1,2)} &= (\lambda+\mu) P_1^{(1)}. \\
\mu P_1^{(1)} + \mu P_2^{(1,2)} &= (\lambda+\mu)\frac{2\lambda}{\mu} P_0, \\
\lambda P_1^{(1)} + \frac{2\lambda^2}{\mu} P_0 &= 2\mu P_2^{(1,2)}
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

在这三个方程式中有三个未知数，$P_0$，$P_1^{(1)}$和 $P_2^{(1,2)}$ 我们去掉第三个（任意一个）方程式，加上正则条件：

$$
P_0 + P_1^{(1)} + P_1^{(2)} + P_2^{(1,1)} + P_2^{(1,2)} + P_2^{(2,2)} = 1.
$$

考虑把（2）代入上式得

$$
\left(1+\frac{2\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(1+\frac{\lambda}{2\mu}\right) P_1^{(1)} + \frac{3}{2} P_2^{(1,2)} = 1. \tag{4}
$$

我们解（3）中第一、二和（4）得

$$
P_2^{(1,2)} = \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right) P_1^{(1)} - \frac{2\lambda}{\mu} P_0. \tag{5}
$$

把（5）代入（3）中第二个方程式；得：

$$
(\lambda+2\mu) P_1^{(1)} = \left[2\lambda + \frac{2\lambda}{\mu}(\lambda+\mu)\right] P_0,
$$

或
$$
P_1^{(1)} = \frac{2\lambda}{\mu} P_0 \tag{6}
$$

把（6）代入（5），得

$$P_2^{(1,2)}=\frac{2\lambda^2}{\mu^2}P_0. \tag{7}$$

把（6）和（7）代入正则条件（4）得

$$P_0\left(1+\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2}+\frac{3\lambda^2}{\mu^2}\right)=1,$$

从而

$$P_0=\left[1-\frac{4\lambda}{\mu}+\frac{4\lambda^2}{\mu^2}\right]^{-1}=\frac{\mu^2}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2}. \tag{8}$$

从（6）和（7）求得

$$P_1^{(1)}=\frac{2\lambda\mu}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2};\quad P_2^{(1,2)}=\frac{2\lambda^2}{\mu^2+4\lambda\mu+4\mu^2};$$

从（2）求得：

$$P_1^{(2)}=\frac{2\lambda\mu}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2};\quad P_2^{(1,1)}=\frac{\lambda^2}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2};$$

$$P_2^{(2,2)}=\frac{\lambda^2}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2}.$$

我们求到了“伪状态”概率后，就可以求状态概率：

$$P_0=\frac{\mu^2}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2};\quad P_1=P_1^{(1)}+P_1^{(2)}=\frac{4\lambda\mu}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2};$$

$$P_2=P_2^{(1,1)}+P_2^{(1,2)}+P_2^{(2,2)}=\frac{4\lambda^2}{\mu^2+4\lambda\mu+4\lambda^2}.$$

例如，当$\lambda=1$，$\mu=4$时（极限平稳状态），两台机床都在工作的概率 $P_0=\frac{16}{25}=0.64$；一台机床修理的概率$P_1=\frac{8}{25}=0.32$；两台机床都在修理的概率 $P_2=\frac{1}{25}=0.04$。

我们看到只有当系统状态数目不多时，才用“伪状态”求解排队问题时，否则计算工作量太重。

**87** 有三台机床组成的技术系统。机床发生故障流是最简

单流．每台机床平均工作时间等于$\bar{t}_{服}$．机床发生故障，立即修复。排除故障的平均时间为$\bar{t}_{修}$。修理时间为指数分布．试求技术系统平均生产能力．

**解** 系统$S$的生、灭图如下图所示：

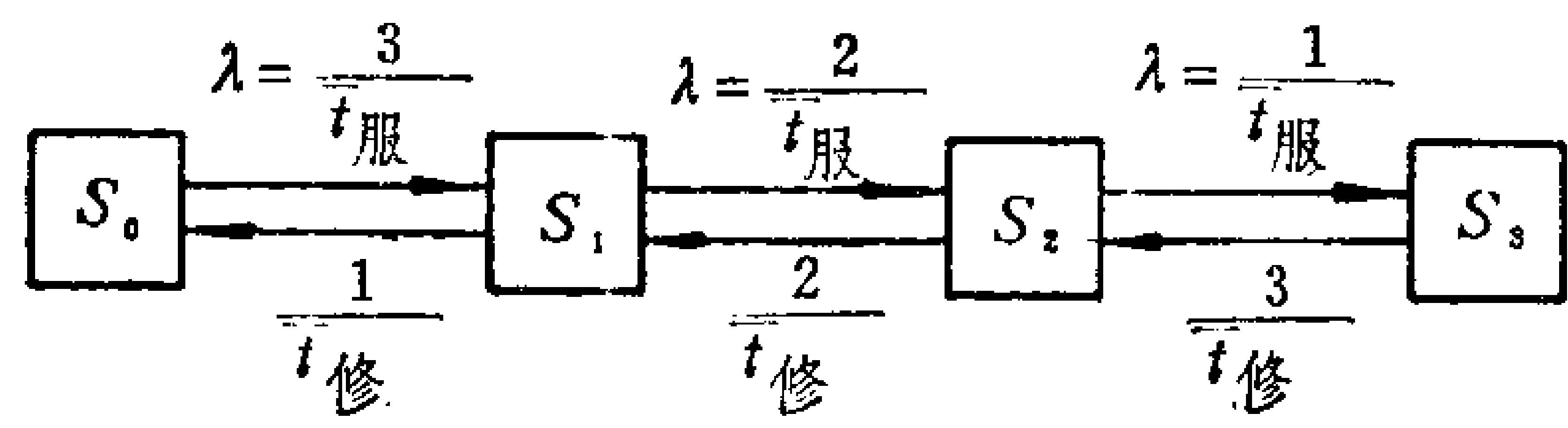



图10.5

图中：$S_0$—三台机床都正常工作；

$S_1$—有一台机床发生故障；

$S_2$—有二台机床发生故障；

$S_3$—所有机床都发生故障．

$\bar{t}_{服}$— 机床无故障工作的平均时间；

$\frac{1}{\bar{t}_{服}}$—机床发生故障的间隔时间．

$\bar{t}_{修}$—修理一台机床的平均时间；

$\frac{1}{\bar{t}_{修}}$—修理强度．即单位时间内平均修理的机床台数．

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，我们有：

$$\frac{3}{\bar{t}_{服}}p_0=\frac{1}{\bar{t}_{修}}p_1,\quad p_1=3\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}p_0.$$

$$\frac{2}{\bar{t}_{服}}p_1=\frac{2}{\bar{t}_{修}}p_2,\quad p_2=3\left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)^2p_0.$$

$$\frac{1}{\bar{t}_{服}} p_2 = \frac{3}{\bar{t}_{修}} p_3, \quad p_3 = \left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)^3 p_0.$$

根据正则条件，$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$，

∴ $$p_0 = \left[1 + 3\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}} + 3\left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)^3\right]^{-1};$$

$$p_1 = 3\left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)p_0; \quad p_2 = 3\left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)^2 p_0;$$

$$p_3 = \left(\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}}\right)^3 p_0.$$

当$\bar{t}_{服} = 10$，$\bar{t}_{修} = 5$，$\frac{\bar{t}_{修}}{\bar{t}_{服}} = \frac{5}{10} = 0.5$.

∴ $$p_0 = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right)^{-1} = \frac{8}{27};$$

$$p_1 = \frac{12}{27}; \quad p_2 = \frac{6}{27}; \quad p_3 = \frac{1}{27}.$$

∴ 技术系统生产能力：$100\% p_0 + 50\% p_1 = 51.9\%$.

**88** 有冷储备的技术装置。技术装置故障流服从最简单流。技术装置由一个主要元件$A_1$和两个储备元件$A_2$和$A_3$组成。当$A_1$出故障时由$A_2$转接工作，当$A_2$出故障时由$A_3$代替。每个储备元件开始工作之前，都处于“冷”状态，因此不会出故障。主要元件的故障强度为$\lambda_1$，储备元件出故障的强度为$\lambda_2$。试求系统的可靠性。

**解** 系统状态转移图为：

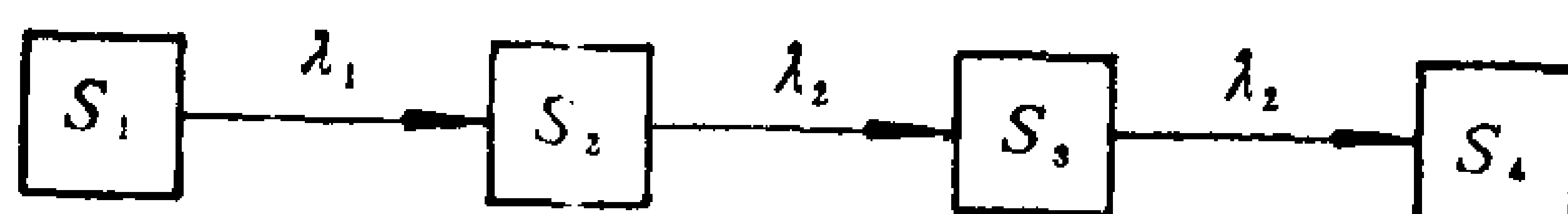



图 10.6

图中　$S_1$—主要元件$A_1$在工作；

$S_2$—储备元件$A_2$在工作；

$S_3$—储备元件$A_3$在工作；

$S_4$—所有元件都不在工作．

由于没有考虑修复过程，所以图中箭头线只指向一个方向．根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，我们有：

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_1 p_1$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_1$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_2 p_3 + \lambda_2 p_2$$

$$\frac{dp_4}{dt} = \lambda_2 p_3$$

还有正则条件：$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$。

由第一个方程式得

$$p_1(t) = e^{-\lambda_1 t}$$

（初始条件为$p_1(0) = 1$）把它代入第二个方程式，

得
$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}.$$

初始条件$p_2(0) = 0$，并积分，得

$$p_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}.$$

把它代入第三个方程式得

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_2 p_3 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{N-\lambda_2 t}.$$

设初始条件为$p_3(0)=0$，积分后得

$$p_3(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}$$

$$-\frac{\lambda_1\lambda_2 t}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}.$$

而 $$p_4(t) = 1-p(t) = 1-(p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)).$$

$$= 1-\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}e^{-\lambda_1 t} - \left[\frac{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_1\lambda_2 t}{\lambda_2-\lambda_1}\right]e^{-\lambda_2 t}.$$

**89** 设技术装置$S$由主要元件$A_1$和三个储备元件：$A_2$，$A_3$，$A_4$组成．主要元件的故障流为最简单流，其强度为$\lambda_1$．储备元件在工作之前发生故障的强度为$\lambda_2$，一旦储备元件开始工作，故障强度立即成为$\tilde{\lambda}_2$．当主要元件出故障后由储备元件$A_2$代替，$A_2$出了故障由$A_3$代替；$A_3$出了毛病由$A_4$代替．

求技术装置系统的可靠性．

系统可能状态有：

$S_{13}$—主要元件正常工作，三个储备元件完好；

$S_{1,2}$—主要元件正常工作，二个储备元件完好，一个储备元件发生故障；

$S_{11}$—主要元件正常工作，一个储备元件完好，二个储备元件发生故障；

$S_{10}$—主要元件正常工作；三个储备元件都发生故障；

$S_{03}$—$A_1$出故障，有一个储备元件代替工作，二个储备元件完好；

$S_{02}$—$A_1$出故障，一个储备元件代替工作，一个储备元件完好，一个储备元件出故障；

$S_{01}$—$A_1$出故障，一个储备元件代替工作，二个储备元件出故障；

$S_{00}$—所有元件都出故障。

系统状态转移图：

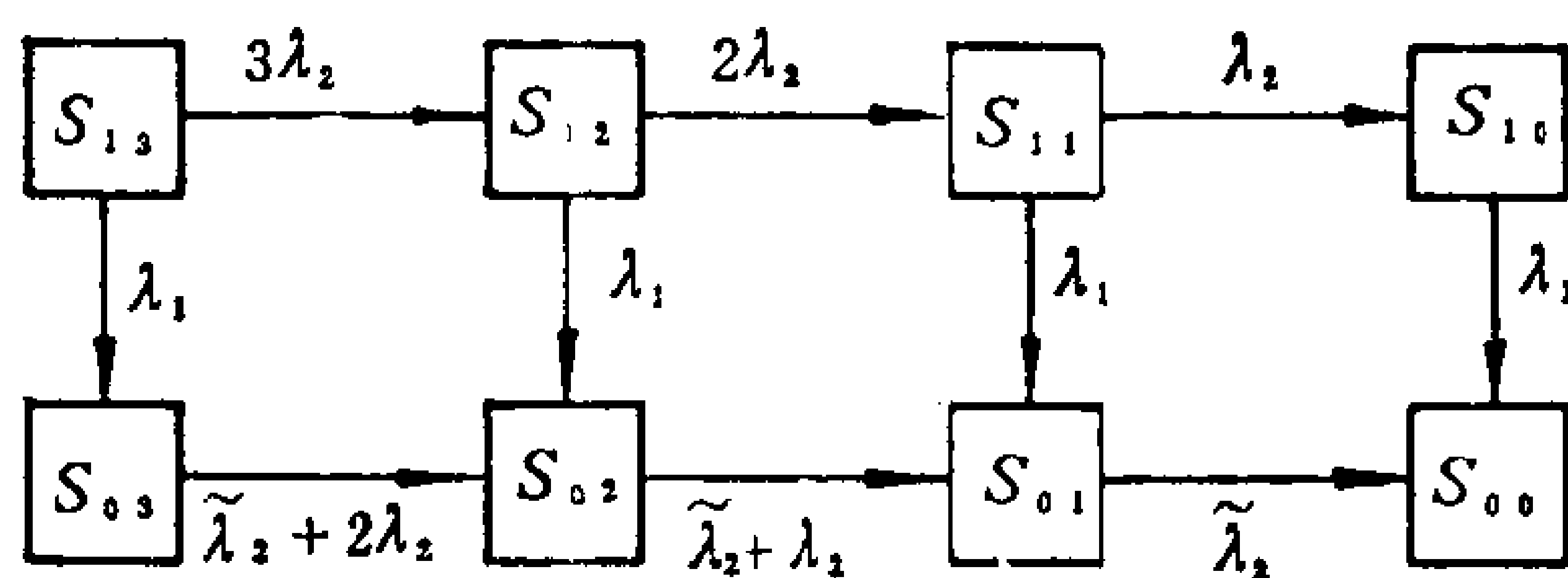



图 10.7

系统状态极限概率方程组为：

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{dp_{13}}{dt} &= -(3\lambda_2+\lambda_1)p_{13},\\
\frac{dp_{12}}{dt} &= -(2\lambda_2+\lambda_1)p_{12}+3\lambda_2 p_{13},\\
\frac{dp_{11}}{dt} &= -(\lambda_2+\lambda_1)p_{11}+2\lambda_2 p_{12},\\
\frac{dp_{10}}{dt} &= -\lambda_1 p_{10}+\lambda_2 p_{11},\\
\frac{dp_{03}}{dt} &= -(\tilde{\lambda}_2+2\lambda_2)p_{03}+\lambda_1 p_{13},\\
\frac{dp_{02}}{dt} &= -(\tilde{\lambda}_2+\lambda_2)p_{02}+\lambda_1 p_{12}+(\tilde{\lambda}_2+2\lambda_2)p_{03},\\
\frac{dp_{01}}{dt} &= -\tilde{\lambda}_2 p_{01}+\lambda_1 p_{11}+(\tilde{\lambda}_2+\lambda_2)p_{02},\\
\frac{dp_{00}}{dt} &= \lambda_1 p_{10}+\tilde{\lambda}_2 p_{01}.
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

还有正则条件：

$$p_{13}+p_{12}+p_{11}+p_{10}+p_{03}+p_{02}+p_{01}+p_{00}=1.$$

由(1)式中第一个方程式，得

$$p_{13}(t)=e^{-(3\lambda_1+\lambda_2)t}. \tag{2}$$

把(2)代入(1)中的第二个方程式，得：$p_{12}(t)$。把它代入(1)式的第三个方程式，得$p_{11}(t)$。以此类推，最后求$p_{00}(t)$。

$$p_{00}(t)=1-(p_{13}(t)+p_{12}(t)+p_{11}(t)+p_{10}(t)$$
$$+p_{03}(t)+p_{02}(t)+p_{01}(t))$$

从而可得系统的可靠性：

$$p(t)=p_{13}(t)+p_{12}(t)+p_{11}(t)+p_{10}(t)+p_{03}(t)$$
$$+p_{02}(t)+p_{01}(t),$$

或 $\quad p(t)=1-p_{00}(t).$

**90** 由一个元件组成的技术系统，它的故障流为最简单流，其参数为$\lambda$。当元件发生故障时，立即换成新的元件。新元件的特征和原元件的特征一样。设系统内备有$N$个储备元件。储备元件处于“冷”状态。求在$t$时间内需要多少个储备元件，或者说，求系统的可靠性。

**解** 本题可按一般方法（上例）解决。为了简单起见，我们采用下法计算：

设在时间轴$ot$上分布着修复流，即修理时间序列（见图3.1）。显然，这是最简单流，具有参数$\lambda$。系统的可靠性$p(t)$是在$t$时刻系统正常工作的概率。为此，把0，$t$时间分成$N$个时段（一个为主要的，$N-1$个是储备的意思）

我们已经知道（见第三章§2）落在$t$时间内的最简单流的事件数服从泊松分布：

$$p_m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad t=1,$$

或 $$p_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \quad (m = 0, 1, \cdots, ).$$

求在(0, $t$)时间内，落入点（事件）的数目不超过$N$ 的概率，这就是系统的可靠性.

$$p(t) = p_0 + p_1 + \cdots + p_N.$$

或 $$p(t) = \sum_{m=0}^{N} p_m = \sum_{m=0}^{N} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{N} \frac{(\lambda t)^m}{m!},$$

运用泊松分布表即可查得$p(t)$值.

**91** 某技术装备由大量独立部件组成. 每个部件在厂时间内，具有相同的很小的故障率. 求$T$ 时间内，至少有一个部件发生故障的概率为0.98.

**解** 据题意，大量独立部件，发生故障的概率很小. 则平均故障数可以应用泊松分布. 即求λ（发生故障的强度）. 已知至少发生一个故障的概率为0.98.

即 $1 - e^{-\lambda} = 0.98$, $e^{-\lambda} = 0.02$, $\therefore \lambda = 3.9 \approx 4$.

即在$T$时间内平均有4个部件发生故障.

**92** 电子计算机需要实时地处理大量信息，一部分在控制中进行加工；一部分存入内存等待处理. 信息量是随机变量，具有一定的概率分布，可看作顾客流. 内存看作服务员. 内存太大，无谓地增大了计算机的体积，重量和成本；内存太小，会使信息遭到损失. 因此，需要用排队论合理选择.

设已知每分钟到达10个任务，$\lambda = 10$. 计算机每分钟可以加工20个任务，$\mu = 20$. 任务在内存中存放时间超过二分钟，即自动撤销. 试求：排队时间大于二分钟的概率，排队平均长度.

**解** 按公式$p(w_{队} > 2) = p_{待} e^{-(m\mu - \lambda)T}$.

而 $$p_{待}=\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{e}{m}\right)^n\frac{m^m}{m!}p_0=\frac{e^m}{m!}p_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{m}\right)^n$$

$$=\frac{e^m}{m!}p_0\frac{1}{1-\frac{e}{m}}$$

$$=\frac{e^m}{(m-1)}\cdot\frac{p_0}{m-e}.$$

∵ $\lambda=10$，$\mu=20$，∴$\rho=\frac{10}{20}=0.5$，$m=1$。

∴ $$p_{待}=\frac{0.5}{0.5}p_0=p_0,\quad 而p_0=1-\rho=1-0.5=0.5.$$

∴ $p_{待}=0.5$.

$$p(w_{队}>2)=0.5\cdot e^{-(20-10)^2}=0.5e^{-20}=10^{-9}.$$

由此可见,任务因计算忙不过来而被撤销的概率为十亿分之一。说明计算机能力有富余。由$p_0=0.5$，可见,计算机有一半时间是空闲的。因而可以增加计算机的负荷，或者降低计算机的运算速度。

现在求排队平均长度：排队平均长度大于内存单元$N$的概率应不大于$10^{-9}$，这时需要的$N$为

$$p_{>N}=\sum_{k=N+1}^{\infty}p_k=\sum_{k=N+1}\rho^{k+1}=\rho^N=10^{-9}.$$

∴ $$N=\frac{-9}{-\ln 2}=30.$$

即，内存单元必须有30个。

93 确定“电铲—自卸卡车”系统中卡车的合理数量。已知：自卸卡车Ma3-503B,载重量7吨。电铲Э1252型的容积1.25米$^3$。卡车运土距离$l=1.5$公里。电铲装一辆卡车需要$t_{装}=1.5$

分钟＝0.025小时（其中包括电铲调移时间）．平均卸车时间$t_{卸}$＝1.3分钟＝0.0217小时．无论空车或重车平均运行速度$v_{均}$＝25公里/时．上述数据来自日常统计观测．自卸卡车平均运输周期按下式计算

$$T_{周}=t_{装}+\frac{2l}{v_{均}}+t_{卸}=0.025+\frac{2\times1.5}{25}+0.0217$$
$$=0.166\text{小时；}$$

从而，单位时间内，卡车平均装车次数为：

$$\lambda=\frac{1}{T_{周}}=\frac{1}{0.166}=6\text{次/时．}$$

而电铲装车强度为

$$\mu=\frac{1}{t_{装}}=\frac{1}{0.025}=40\text{辆/时．}$$

需要的自卸卡车数目为．

$$\frac{T}{t_{装}}=\frac{0.166}{0.025}\approx7\text{辆}\quad\left(\text{或}\frac{\mu}{\lambda}=\frac{40}{6}\approx7\text{辆}\right).$$

为了计算电铲和卡车的停闲时间，需要确定系统的各种可能状态．计算公式为

$$p_k=\frac{N!}{(N-K)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \tag{1}$$

式中 $N$—运输中的卡车数；

$K$—0，1，…，$N$—系统的可能状态．

$p_0$—所有卡车都在运行，即不需要装车或者说，电铲空着的概率．

$\lambda$—单位时间内，卡车装车次数：

$\mu$—单位时间内，电铲可能装车数；

各种状态计算结果列于表1．表1中第一格为系统的各种可能状态$k=0$，1，…，10．

第二格由第一格的数值减去1获得。

第三格按下式计算后填入。

$$\frac{p_k}{p_0}=\frac{N!}{(N-K)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k. \tag{2}$$

$k=0$； $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-0)!}\left(\frac{6}{40}\right)^0=1.0$。

$k=1$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-1)!}\left(\frac{6}{40}\right)^1=1.5$；

$k=2$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-2)!}\left(\frac{6}{40}\right)^2=2.025$；

$k=3$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-3)!}\left(\frac{6}{40}\right)^3=2.430$；

$k=4$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-4)!}\left(\frac{6}{40}\right)^4=2.551$；

$k=5$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-5)!}\left(\frac{6}{40}\right)^5=2.290$；

$k=6$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-6)!}\left(\frac{6}{40}\right)^6=1.715$；

$k=7$， $\frac{p_k}{p^0}=\frac{10!}{(10-7)!}\left(\frac{7}{40}\right)^7=1.033$；

$k=8$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-8)!}\left(\frac{6}{40}\right)^8=0.464$；

$k=9$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-9)!}\left(\frac{6}{40}\right)^9=0.139$；

$k=10$， $\frac{p_k}{p_0}=\frac{10!}{(10-10)!}\left(\frac{6}{40}\right)^{10}=0.00$。

把第三格的值加总，得：

$$\frac{\sum_{k=0}^{10} p_k}{p_0} = 15.147$$

应注意，$\sum_{k=0}^{10} p_k = 1$（系统可能状态概率之和为1），

或　　$\frac{1}{p_0} = 15.147$，

从而　　$p_0 = \frac{1}{15.147} = 0.066$。

| $K$ | $K-1$ | $\frac{P_K}{P_0}$ | $P_K$ | $(K-1)P_K$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | — | 1.000 | 0.006 | — |
| 1 | 0 | 1.500 | 0.099 | 0.000 |
| 2 | 1 | 2.025 | 0.134 | 0.134 |
| 3 | 2 | 2.430 | 0.160 | 0.320 |
| 4 | 3 | 2.553 | 0.168 | 0.504 |
| 5 | 4 | 2.290 | 0.151 | 0.604 |
| 6 | 5 | 1.715 | 0.113 | 0.565 |
| 7 | 6 | 1.033 | 0.068 | 0.408 |
| 8 | 7 | 0.464 | 0.031 | 0.217 |
| 9 | 8 | 0.139 | 0.010 | 0.080 |
| 10 | 9 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | | $\frac{\sum_{K=0}^{10} P_K}{P_0} = 15.147$ | $\sum_{K=0}^{10} P_K = 1$ | $\sum_{K=0}^{10}(K-1)P_K = 2.832$ |

就是说，当有10辆卡车运土时，电铲空闲时间为每个班时间的6.6%。

第四格的值由第三格乘 $P_0 = 0.066$得到。

第五格的值由第二格乘第四格得到。

把第四和第五格加总得：

$$\sum_{k=0}^{10} P_k = 1.000 \text{和} \quad \sum_{k=0}^{10} (k-1) P_k = 2.832.$$

一辆卡车在一个班内空闲时间的期望值为：

$$T_{\text{卡}} = \frac{\sum_{k=0}^{N} (k-1)\, P_k}{N} = \frac{2.832}{10} = 0.2832.$$

为了全面估计电铲和卡车工作间的协调关系，必须计算系统内有不等量卡车时的情况.

显然，再增加卡车是不合理的，因为电铲的空闲时间再少，技术上也不允许．因此，卡车的数量应少于10．即 $N=9,8,7,6,5,4$.

所有计算同上面一样．计算工作量很大．因而应该用电子计算机计算．计算结果列于表2.

由公式(1) 可见，在给定卡车数量时，电铲和运输工具的大概的空闲时间只取决于如下关系：

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{t_{\text{装}}}{T_{\text{周}}} = \rho.$$

在表2中，对$\rho$的任何值(自0.03到0.30)，用间隔0.01计算$P_0$值，表中列出$N=2\sim25$.

表中有两个边界条件；$P_0 \geqslant 0.05$，$T_k \geqslant 0.05N$．其目的是机器可能利用的时间不能超过95%.

因此，在给定$\rho, N$ 条件下，确定系统空闲的概率，然后确定一辆卡车的空闲时间：

$$T = \frac{T_k}{N}.$$

本例中$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{6}{40} = 0.15$．当$N=9$时，$P_0 = 0.106$而

$$T=\frac{2.144}{9}=0.238.$$

因此，电铲和卡车空闲时间的期望值取决于 $P_0$ 和 $T$，计算结果列于下表

| 卡车数量 $N$ | $P_0$ | $T$ | $N$ | $P_0$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.066 | 0.283 | 6 | 0.310 | 0.118 |
| 9 | 0.106 | 0.238 | 5 | 0.404 | 0.087 |
| 8 | 0.160 | 0.194 | 4 | 0.509 | 0.064 |
| 7 | 0.228 | 0.155 | | | |

现在我们有足够的资料研究运输过程的技术—经济指标。我们感兴趣的指标有：

*a*）电铲利用率

$$k_{电}=(1-P_0);$$

*b*）卡车利用率

$$k_{卡}=(1-T);$$

*c*）一班时间内，电铲的闲置费用

$$C_{电}=C_{电-班}P_0.$$

式中　$C_{电-班}$—电铲工作一个班时间的费用。

*d*）$N$辆自卸卡车停闲费用

$$C_{卡}=C_{卡车-班}TN.$$

式中　$C_{卡车-班}$—卡车工作一个班时间的费用。

*e*）在一个班时间内，机器停闲损失费用

$$e^h=C_{电}+C_{卡车}.$$

*f*）系统生产能力的期望值

$$\Pi_0=\Pi_{电}\cdot\rho_{电}.$$

式中　$\Pi_{电}$—电铲工作一个班的生产能力；

9) 运输一立方米土壤的成本，元/$m^3$。

$$C=\frac{C_{电-班}+NC_{卡车班}}{\Pi_0}.$$

根据上述指标和具体条件确定卡车最优数量。

设使系统有最少停闲损失费用来确定卡车的辆数，$C_{电-班}=49.6$元；$C_{卡车-班}=26.2$元。

计 算 结 果 列 于 下 表

| $N$ | $P_0$ | $T$ | 停 闲 损 失 费 | | $NC_卡$ | 总损失费用 $C^K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $C_电$ | 一辆卡车 | | |
| 10 | 0.066 | 0.283 | 3.27 | 7.42 | 74.20 | 77.47 |
| 9 | 0.106 | 0.238 | 5.26 | 6.23 | 56.07 | 61.33 |
| 8 | 0.160 | 0.194 | 7.94 | 5.08 | 40.64 | 48.58 |
| 7 | 0.228 | 0.155 | 11.30 | 4.05 | 28.35 | 39.65 |
| 6 | 0.310 | 0.118 | 15.35 | 3.09 | 18.54 | 33.89 |
| 5 | 0.404 | 0.087 | 20.00 | 2.28 | 11.40 | 31.40 |
| 4 | 0.509 | 0.064 | 25.20 | 1.68 | 6.72 | 31.92 |

由表可见系统内机器停闲损失费用很大程度上取决于自卸卡车数量。当有5辆卡车时，停闲费用最少。

**94** 设地面导引站有三条导引通道。每条通道只能导引一架歼击机飞向一个目标。一架歼击机的平均导引时间（即平均服务时间）$\bar{t}_服=4$分钟。空中目标流的密度为$\lambda=0.75$，即每分钟出现0.75架飞机（目标）。如果目标在进入歼击机作战区时没有受到攻击，则这个目标被漏掉。试确定服务系统的效率指标。

**解** 已知：$\lambda=0.75$，$\frac{1}{\mu}=4$。$\therefore\rho=0.75\times4=3$，即在一架歼击机的导引时间内，平均有3个目标进入歼击区作战区。

所有通道（服务员）都空着的概率

$$P_0=\left[1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$

今　$n=3$，$\rho=3$。$\therefore P_0=\left[1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right]^{-1}=\frac{1}{13}\approx0.077$。

系统相对通过能力

$$Q=1-P_{损}=1-P_3.$$

而　$$P_3=\frac{\rho^3}{3!}P_0=\frac{3^3}{3\times2}\times0.077\approx0.346,$$

从而得　$Q=1-0.346=0.654$。

即进入歼击区的目标中有65%的目标受到歼击机的攻击。

系统的绝对通过能力为

$$A=\lambda Q=0.75\times0.654=0.49,$$

即每分钟平均有0.49个目标受到歼击机的攻击，也即每小时有30个目标受到攻击。

系统损失的概率为

$$P_{损}=1-Q=1-0.654=0.346,$$

即三条通道全部被占用的概率为0.346。

**95**　派出三架飞机轰炸某个目标。设每架飞机被敌方防空武器击毁的概率$P=0.3$。各架飞机被击毁概率是独立事件。剩下一架飞机飞到目的地时，对目标的平均相对杀伤面积$M(1)=0.5$。若有两架飞机飞到目的地时，平均相对杀伤面积则为$M(2)=0.8$。如果三架飞机都飞到目的地，则杀伤面积为$M(3)=0.95$。试计算三架飞机对目标的相等杀伤面积的平均值。

**解**　三架飞机飞往轰炸目标时有两种可能状态发生：飞机被击毁，飞机飞到目的地。有$m'$架被击毁的概率可按二项分布确定

$$P_{m'}=C_N^{m'}P^{m'}(1-P)^{N-m'}.$$

式中　　$P$—有一架飞机被击毁的概率；本例中$P=0.3$

现在计算在三架飞机中有$m$架不被击毁的概率。

$$P'_m=P_{n-m}=C_n^{n-m}P^{n-m}(1-P)^m$$

考虑到　$C_n^m=C_n^{n-m}$，

∴　　$P'_m=C_n^mP^{n-m}(1-P)^m$.

将$n=3$，$P=0.3$代入上式得

$$P'_1=3P^2(1-P)=0.189,$$

$$P'_2=3P(1-P)^2=0.441,$$

$$P'_3=(1-P)^3=0.343,$$

因而，炸毁目标的平均相对面积为

$$\overline{S}=0.189\times0.5+0.441\times0.8+0.343\times0.95=0.773.$$

即派出三架飞机轰炸敌目标时，在遭到敌人对抗条件下，对目标的平均杀伤面积为77%。

**96**　用防空武器抗击五发有翼导弹。由于导弹飞行速度很快，所以不可能进行火力转移。每发导弹被击毁的概率 $P=0.7$。试计算被击毁导弹的平均数和至少击毁 4 发导弹的概率。

**解**　击毁导弹的平均数等于导弹的数目与击毁概率之积，

即　$M(N)=5\times0.7=3.5$发。

击毁4枚导弹的概率为：

$$P_4=C_N^mP^m(1-P)^{N-m}.$$

今　　$N=5, m=4, P=0.7$.

∴　　$P_4=C_5^4\times0.7^4(1-0.7)^{5-4}=0.36$.

同理可算出击毁5枚导弹的概率

$$P_5=0.7^5=0.168.$$

因此，最少击毁四枚，即四枚和五枚的概率

∴　　$P(>4)=P_4+P_5=0.36+0.168=0.528$.

即有53%的可能击毁至少4枚导弹的概率。

97 敌机犯我领空。平均每分钟有三架敌机到来。求在1分钟内来犯敌机架数的概率。

**解** 敌机在我领空出现可看作最简单流事件，其发生的概率：

$$P_m(t)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}.$$

今 $\lambda=3,\ t=1,$

∴ $$P_m(1)=\frac{3^m}{m!}e^{-3}.$$

把不同的$m$值代入，得如下结果：

| 在1分钟内出现敌机的架数$m$ | 发生的概率$P_m(t)$ |
|---|---|
| 0 | 0.0498 |
| 1 | 0.1494 |
| 2 | 0.2241 |
| 3 | 0.2241 |
| 4 | 0.1680 |
| 5 | 0.1008 |
| 6 | 0.0504 |
| 7 | 0.0217 |
| 8 | 0.0081 |
| 9 | 0.0005 |

由表可见，在1分钟内有三架敌机在我领空出现的概率只有22%在1分钟内到达8架以上敌机的概率很小，实际上不可能．在实际计算时，需要用排队论分析敌机到达流的概率分布律，并估计它的参数．在分析实际流时，一般根据敌机到达间隔时间$T_i$．在实际计算时，先假设敌机到达间隔时间服从指数分布．即

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

为了检验实际流是否真的服从指数分布可用下式近似计算．

$$\frac{m_i}{u}\approx\lambda e^{-\lambda t_i}\Delta t; \qquad (*)$$

式中 $m_i$—顾客到达间隔的数目，

$u$—到达间隔的总数（$u=\Sigma m_i$），

$\Delta t$—时间单元．

如果实际到达间隔时间的频数和按公式(＊)计算的理论频数接近．则实际流可以认为是最简单流．

敌机到达间隔理论频数按公式(＊)并变换成下式计算．

$$\log m_i' = \log u + \log\lambda - \lambda t_i \log e + \log\Delta t. \qquad (**)$$

如何确定$\lambda$呢？指数分布的重要特征是：到达间隔时间的平均值等于到达强度$\lambda$的倒数（见第三章§1，公式(3.12))．即

$$\overline{T} = \frac{\Sigma m_i T}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i T}{u},$$

或 $$\lambda = \frac{1}{\overline{T}} = \frac{u}{\Sigma m_i T}.$$

在公式(**)中只乘下$t_i$和$\Delta t$值的确定：$t_i$就是每个具体间隔时间．如果间隔时间是分组的，则$t_i = \frac{t_x + t_{x+1}}{2}$，即每组的组中值．

$\Delta t$就是组距．

当统计次数很多时，可以用皮尔逊$x^2$检验．(检验方法见第五章)．

**98** 设敌机对某目标进行空袭．敌机平均每小时到达30架．保卫目标的有6座武器．每座武器对来犯敌机的射击时间平均为0.25小时．试求防空系统的效率指标．

**解** 已知：$\lambda = 30$，$\mu = \frac{1}{\overline{t}_{服}} = \frac{1}{0.25} = 4.0$，

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{4} = 7.5.$$

本系统为多通道损失制系统．顾客为来犯敌机，服务员是6座防空武器，平均射击时间为服务时间．当6座武器都对来犯敌机瞄准射击时，到达的敌机，可能突破防卫系统．这时，系统的效率指标见第七章§2．

1）六座武器都不在射击的概率：

$$P_0=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}$$

$$=\left[(1+7.5)+\frac{7.5^2}{2!}+\cdots+\frac{7.5^6}{6!}\right]^{-1}=0.0015.$$

这个概率很小，说明防卫系统处于高负荷状态

2）敌机突破防卫系统的概率．损失的概率．

$$P_{损}=P_n=\frac{\rho^n}{n!}P_0=\frac{7.5^6}{6!}\times 0.0015=0.3615,$$

即有36％的敌机可能突破防卫系统．这个概率很大．

3）系统的相对通过能力

$$Q=1-P_{损}=1-0.3615=0.6385.$$

即当有100架敌机来犯时，约有64％的敌机遭到射击．

4）系统的绝对通过能力

$$A=\lambda Q=\lambda(1-P_{损})=30(1-0.3615)=19.155.$$

即在每小时平均有30架敌机来犯时，约有$\frac{1}{3}$的敌机得不到射击．

5）占用服务员的平均数，即六座武器中平均在射击的概率：

$$N_{占}=\sum_{k=1}^{n}kP_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho^k}{(k-1)!}P_0=\frac{A}{\mu}=\frac{\lambda(1-P_n)}{\mu}$$

$$=\lambda\bar{t}_{服}(1-P_n)=\rho(1-P_n)=7.5\times 0.6385$$

$$=4.7884.$$

即在6座武器中约有5座武器在不停地射击．

6）武器利用系数

$$k_{占}=\frac{N_{占}}{n}=\frac{4.7884}{6}=0.7981.$$

即有80%的利用率。

7）空着武器的平均数。

$$N_0=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\rho^k(n-k)}{k!}P_0$$

$$=\sum_{k=0}^{6-1}\frac{7.5^k(6-k)}{k!}\times 0.0015=1.2116.$$

即闲着的武器只有1.2座。

8）空着武器的百分比。

$$k_{空}=\frac{N_0}{n}=\frac{1.2116}{6}=0.2019.$$

总之，防卫系统需要重新组织。否则不能有效保卫目标。

**99** 设敌机对防空系统所保卫的设施进行空袭。空袭的平均强度$\lambda=4$架/分钟。在防空区内配置六座防空武器。每一座武器对一架敌机的平均射击时间$\bar{t}_{服}=0.5$分钟。试估计防空系统的效率指标。

**解** 设来犯敌机是泊松流。

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=4\times 0.5=2.$$

为了求出防空系统处于各个状态的概率可应用如下公式：

$$\frac{P_k}{P_0}=\frac{\rho^k}{k!}.$$

计算结果列于下表：

| 正在射击的武器数 $K$ | $\frac{P_K}{P_0}$ | $P_K$ | $KP_K$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.136 | 0 |
| 1 | 2 | 0.272 | 0.272 |
| 2 | 3 | 0.272 | 0.544 |
| 3 | 1.333 | 0.181 | 0.543 |
| 4 | 0.666 | 0.091 | 0.363 |
| 5 | 0.267 | 0.036 | 0.180 |
| 6 | 0.088 | 0.012 | 0.072 |
| 计 | 7.353 | 1.0 | 1.975 |

根据上表中的数据计算下列效率指标：

1）敌机突破防卫系统的概率，即系统损失的概率：

$P_{损}=P_n=P_{k-6}=0.012.$

2）敌机遭到射击的概率

$P_{服}=Q=1-P_n=1-0.012\approx 0.98.$

3）敌机被击落的概率，如果敌机被击毁的概率$P_{毁}=0.7$.即

$P_{毁}\cdot Q=0.7\times 0.98=0.686.$

4）受到射击敌机的平均数．如果总共来犯的敌机$N=24$架．即

$N\times P_{服}=NQ=24\times 0.98=23.5$（架）

5）被击落敌机的平均数

$N\times P_{毁}Q=24\times 0.686=16.46$（架）

6）突破防空线的敌机平均数

$N(1-P_{毁}Q)=24(1-0.686)=7.5$（架）。

7）参加抗击武器的平均数：

$$M=\sum_{k=1}^{n}kP_k=1.975$$（见表中最后一格）。

8）每座武器用于射击的万分率

$$k_{占}=\frac{M}{n}=\frac{1.975}{6}=0.325.$$

即每座武器平均用以射击的时间为33%。

9）空袭持续时间

$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{24}{4}=6\ （分钟）$$

10）在空袭期间每座武器平均射击的敌机数

$$\frac{NP_{服}}{n}=\frac{24\times 0.98}{6}=3.92\ （架）$$

现在我们讨论防空武器数量对防空效率的影响。为便于比较，列出表(*)。由表可见，抗击武器由6座减到5座，对防空系统效率无多大影响若进一步减少武器数目，则防空系统防空能力将显著降低。由表还可见，随着武器数目的减少，每座武器的负荷不断增加。

表*

| $n$ | $P_{服}$ | $M$ | $K_{占}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.60 | 1.20 | 0.60 |
| 3 | 0.78 | 1.61 | 0.54 |
| 4 | 0.90 | 1.81 | 0.45 |
| 5 | 0.96 | 1.93 | 0.39 |
| 6 | 0.99 | 1.98 | 0.33 |

现在我们讨论集中力量打歼灭战的必要性和合理性。

设用两座和三座武器集中射击一架敌机。因为各座武器射击敌机的服务时间服从指数分布，所以整个系统对敌机的服务时间也是指数分布。即

$$F(t_{服}<t)=1-e^{-(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)t}$$

系统的服务时间的参数$\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i$。

当所有武器的射击能力相同时，$\mu=n\mu_i$。即用$n$座武器对一架敌机射击时，平均服务（射击）时间将缩小$n$倍。因此，用

两座武器集中射击一架敌机时，平均射击时间为$\frac{1}{2}\times 0.5=0.25$分钟. 如果用三座武器集中射击时，平均射击时间为$\frac{1}{3}\times 0.5=0.167$分钟. 因此，

$$\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}=4\times 0.25=1.$$

$$\rho_3=\frac{\lambda}{\mu_3}=4\times 0.167=0.67.$$

若每座武器击落敌机的概率分别为0.1和0.9，则被击毁敌机的平均数目列于下表

| 集中射击一架敌机的武器数目 | 被击毁敌机的平均数 | |
|---|---|---|
| | $P=0.1$ | $P=0.9$ |
| 1 | 1.2 | 10.9 |
| 2 | 2.2 | 11.2 |
| 3 | 3.0 | 10.5 |

由表可见，当每座武器击毁敌机的概率很小时，集中射击能提高防空效率，因此，集中力量打歼灭战是有利的. 但当$P$很大时，集中射击的效率不一定有效. 在我们的例子中集中两座武器射击一架敌机是有效的. ($P=0.9$).

**100** 某重要设施由三道防线组成防空系统. 第一道防线上配置两座武器；第二道防线上配置三座武器；第三道防线上配置一座武器. 设所有武器类型一样. 武器对来犯敌机的射击时间服从参数$\mu=1$架/分钟的指数分布. 敌机来犯强度$\lambda=2$架/分钟，且服从泊松流. 如果防空武器击落敌机的概率$P\to 1$. 试估计防空系统的效率.

**解** 每座武器同一时间内只能射击1架敌机. 当第一道防线上的武器都在射击时，到来的敌机突破第一道防线. 当第一、第二道防线上的武器都在射击时，到来的敌机可能突破第二道防线. 当三道防线上的武器都在射击时，到来的敌机有可能进入设施上空. 由于敌机在每道防线上逗留的时间很短，所以把本题看作损失制服务系统.

今已知：$\lambda=2$，$\mu=1$；$\therefore\ \rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=2$。

1）敌机突破第一道防线的概率，即$P_{损1}$。

$$P_{损1}=P_{n_1}=\frac{\rho^n}{(n_1)!}P_0.$$

今 $n_1=2$（第一道防线上配备的武器数目）。

$$P_{损1}=\frac{2^2}{2!}\frac{1}{1+2+\dfrac{2^2}{2!}}=0.4,$$

即在第一道防线上约有40%的敌机未遭到射击。

2）敌机突破第一和第二道防线的概率。即

$$P_{损2}=P_{n_1+n_2}=\frac{\dfrac{\rho^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n_1+n_2}\dfrac{\rho^k}{k!}}=\frac{\dfrac{2^5}{5!}}{\sum\limits_{k=0}^{k=5}\dfrac{2^k}{k!}}=0.037.$$

3）敌机突破整个防空系统的概率为：

$$P_{损}=P_{n_1+n_2+n_3}=P_6=\frac{\rho^6}{6!}P_0=0.001,$$

即参加空袭敌机有1000架，则平均有一架敌机突破防空系统。

**101** 设有两道防线组成防空系统。若来犯敌机通过地带很狭窄，以致只能受到各道防线上的一座武器的射击。敌机在防线区内逗留时间较短，以致不能保证防空武器可靠地击毁敌机。设两道防线上的武器对敌机的射击时间都是随机变数，它们分别为$\mu_1$和$\mu_2$参数的指数分布。来犯敌机按最简单流到达，其强度为$\lambda$。试求敌机突破防卫系统的概率。

防卫系统的可能状态：

$S_{00}$——配置在两道防线上的武器都不在射击；

$S_{10}$——第一道防线上的武器在射击；而第二道防线上的

武器不在射击；

$S_{01}$——第一道防线上的武器不在射击；而第二道防线上的武器在射击；

$S_{11}$一道防线上的两武器都在射击。

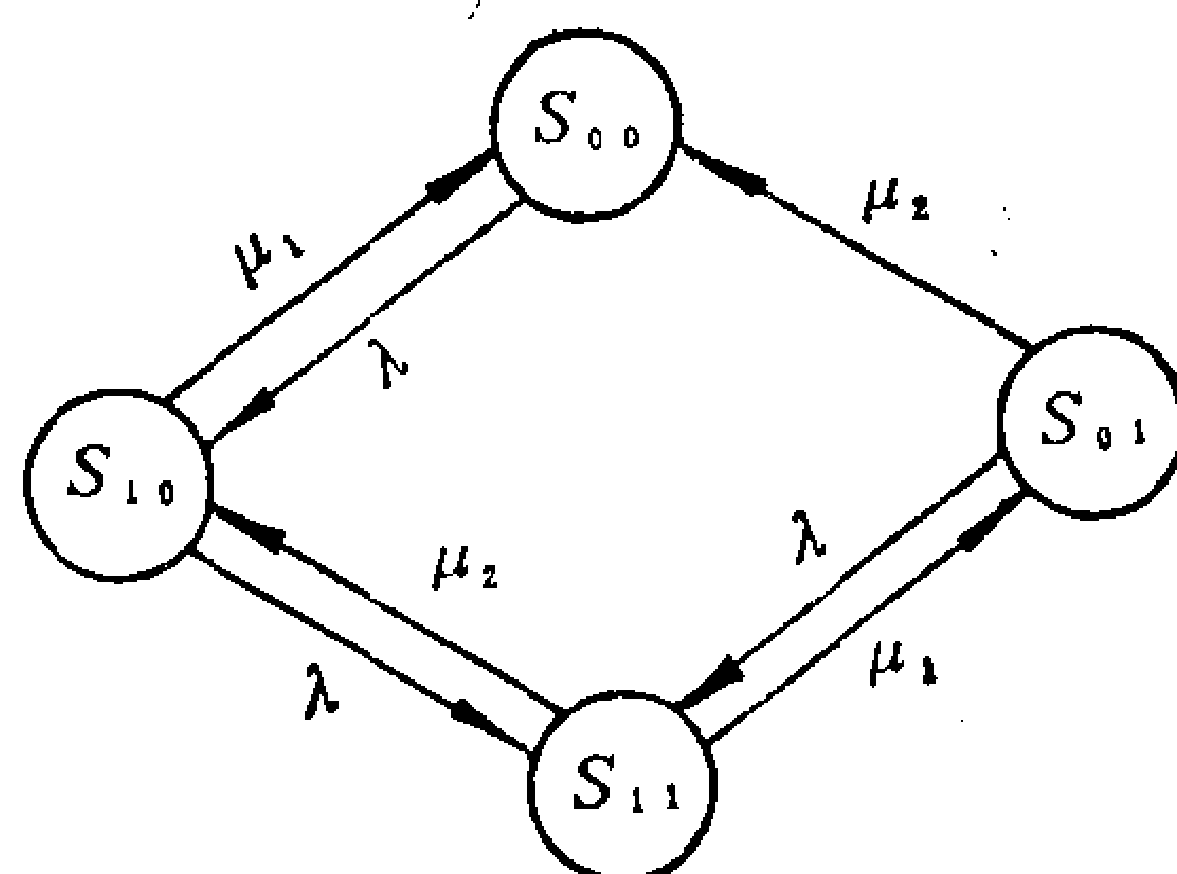


图10.8

系统生、灭图如右图所示：根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，我们有：

对$S_{00}$，$\lambda P_{00}=\mu_1 P_{10}+\mu_2 P_{01}$，

对$S_{01}$，$(\lambda+\mu_2)P_{01}=\mu_1 P\quad_1$，

对$S_{10}$，$(\lambda+\mu_1)P_{10}=\lambda P_{00}+\mu_2 P_{11}$，

对$S_{11}(\mu_1+\mu_2)P_{11}=\lambda P_{01}+\lambda P_{10}$。

解这组方程可以解出：

1）敌机突破防空系统的概率

$$P_{11}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+\lambda(\mu+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}.$$

2）两道防线上的武器都不射击的概率

$$P_{00}=\frac{\mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda^2(\lambda+\mu_2)}P_{11}.$$

3）第一服务系统忙着，第二服务系统空着的概率为

$$P_{10}=\frac{\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda(\lambda+\mu_2)}P_{11}.$$

4）第二服务系统忙着，第一服务系统空着的概率为

$$P_{01}=\frac{\mu_1}{\lambda+\mu_2}P_{11}.$$

5）第一服务系统负荷系数

$$K_1=\frac{\mu_1[\lambda(\lambda+\mu_2)+\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)]}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_2+\mu_2)+\dfrac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}.$$

6）第二服务系统的负荷系数

$$K_2=\frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\dfrac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]},$$

或 $K_1+K_2=1$.

7）两个服务系统负荷系数的比值

$$K=\frac{K_1}{K_2}=\frac{\mu_1(\lambda+\mu_2)}{\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}+\frac{\mu_1}{\lambda}.$$

现在我们代入数值计算：

设 $\mu_1=2$，$\mu_2=4$.

$$P_{11}=\frac{2^2}{2^2+2(2+4)+\dfrac{2\times4}{2+4}(2\times2+2+4)}=0.137.$$

现将两道防线的武器交换配置。即$\mu_1=4$，$\mu_2=2$，这时，敌机突破防空系统的概率为

$$P_{11}=\frac{2^2}{2^2+2(2+4)+\dfrac{4\times2}{2+2}(2\times2+2+4)}=0.111.$$

由此可见，沿各道防线适当配置武器可以提高防空系统效力。

**102** 由侦察系统和火控系统组成服务系统。如果侦察系统平均每小时发现敌人目标$\lambda=4$个。完成一次侦察平均需要$\bar{t}_{服1}=0.5$小时；火、控系统完成一次攻击平均需要$\bar{t}_{服2}=0.25$小时。求系统服务概率。

**解** 按公式

$$P_{服}=\frac{\mu_1\cdot\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}$$

$$=\frac{2\times4(4+2+4)}{(4+2)(4+4)(2+4)}=0.2778.$$

计算表明，系统效率不好。因此，火控系统需要改善。例如，$\bar{t}_{服2}=0.05$小时，则

$$P_{服}=\frac{2\times20(4+2+20)}{(4+2)(4+20)(2+20)}=0.3282,$$

即系统服务效率提高5%。

**103** 设有一个专门测试站。站上设有两台化学测试仪器。该仪器由两个单元组成：一个为确定放射物质的类型，另一个为测定放射性。请求测定的武器每分钟平均到达$\lambda=0.5$/分钟。由于需要测定的武器类型不同，因此，测试时间是随机的。设确定放射类型平均需时$\bar{t}_{服1}=5$分钟；而确定放射性强度的需时$\bar{t}_{服2}=2.5$分钟。当需要测定的武器到达时，测试设备不空，则武器到另外地点去测试，因而可看作损失制系统。试求化学测试系统效率。

**解** 已知：$\lambda=0.5$，$\bar{t}_{服1}=5$，$\bar{t}_{服2}=0.25$。

$$P_{损}=P_{11}=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+(\mu_1+\mu_2)\lambda+\frac{\mu_1\cdot\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}$$

$$=\frac{0.5^2}{0.5^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{0.25}\right)\times0.5+\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{0.25}}{0.5+\frac{1}{0.25}}\left(2\times0.5+\frac{1}{5}+\frac{1}{0.25}\right)}$$

$=0.36$。

$\therefore\qquad P_{服}=1-P_{损}=1-0.36=0.64$

即有64%的武器(请求测定的)得到服务。

如果化学测试仪改变服务强度，即$\bar{t}_{服_1}=2.5$分钟，这时，$P_{服}=0.66$，即提高服务能力2%。

**104** 如果在测试站设置二台化学测试仪器。第一台仪器的测试能力$\bar{t}_{服_1}=2.5$分钟；第二台$\bar{t}_{服_2}=5$分钟。测试机器到达强度$\lambda=0.5$台/分钟。

上题计算表明，系统服务能力为66%。如果第一台仪器由新手操作，其服务能力显然会降低；第二台由有经验的老兵操作，使服务能力提高到80%。试求化学测试仪器能力应为多少？

**解** 化学测试仪有不能能力的类型：

$\bar{t}_{服}=2.5$；2；1.67；1.43；1.25；1.11；1。

计算结果列于下表

| $\bar{t}_{服}$ | 2.5 | 2 | 1.67 | 1.43 | 1.25 | 1.11 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_{服}$ | 0.66 | 0.7 | 0.74 | 0.77 | 0.79 | 0.81 | 0.84 |

由表可见，当$\bar{t}_{服_1}=1.177$ ($\mu_1=0.85$)；$\bar{t}_{服_2}=5$分钟 ($\mu_2=0.2$)时能满足要求。

为了确定第一台和第二台化学测试仪器的负荷系数。按下式计算：

$$K_1=\frac{\mu_1[\lambda(\lambda+\mu_2)+\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)]}{(\lambda+\mu_2)[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\dfrac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}$$

$$=\frac{0.85[0.5(0.5+0.2)+0.2(0.5+0.85+0.2)]}{(0.5+0.2)[0.5(0.85+0.2)+\dfrac{0.85\times0.2}{0.5+0.2}(2\times0.5+0.85+0.2)}=0.79$$

第二台为

$$K_2=1-K_1=0.21,$$

即第一台解通过79%，而第二台只存21%。所以，第一台负荷高$\frac{79}{21}=3.8$倍。因而，老兵应放在第一台化学测试仪上.

**105** 设某侦察系统具有一定的侦察手段能力发现敌人的火力点，指挥所及部队集结地点等目标.如果侦察系统单位时间内平均发现$\mu_1$个目标。从发现一个目标到发现另一个目标的时间间隔是随机变数.被发现的目标组成最简单流，其强度为$\lambda$.将侦察到的数据立即送入情报处理和火力控制系统.火、控系统的通过能力是有限的。火、控系统处理每个目标的数据所需的时间也是随机变数。设它服从指数分布，单位时间内能处理$\mu_2$个目标的数据。根据处理的数据进行火力分配，以便消灭目标。

由于目标逗留时间很短，本系统可看作损失制系统。

系统的可能状态：

$S_{00}$——侦察系统和火、控系统都空闲着，

$S_{10}$——侦察系统正在获取已发现目标的数据，而火、控系统闲着，

$S_{01}$——侦察系统空着，而火、控系统正在处理目标数据，

$S_{11}$——两个系统都在工作。

系统状态生、灭图如下：

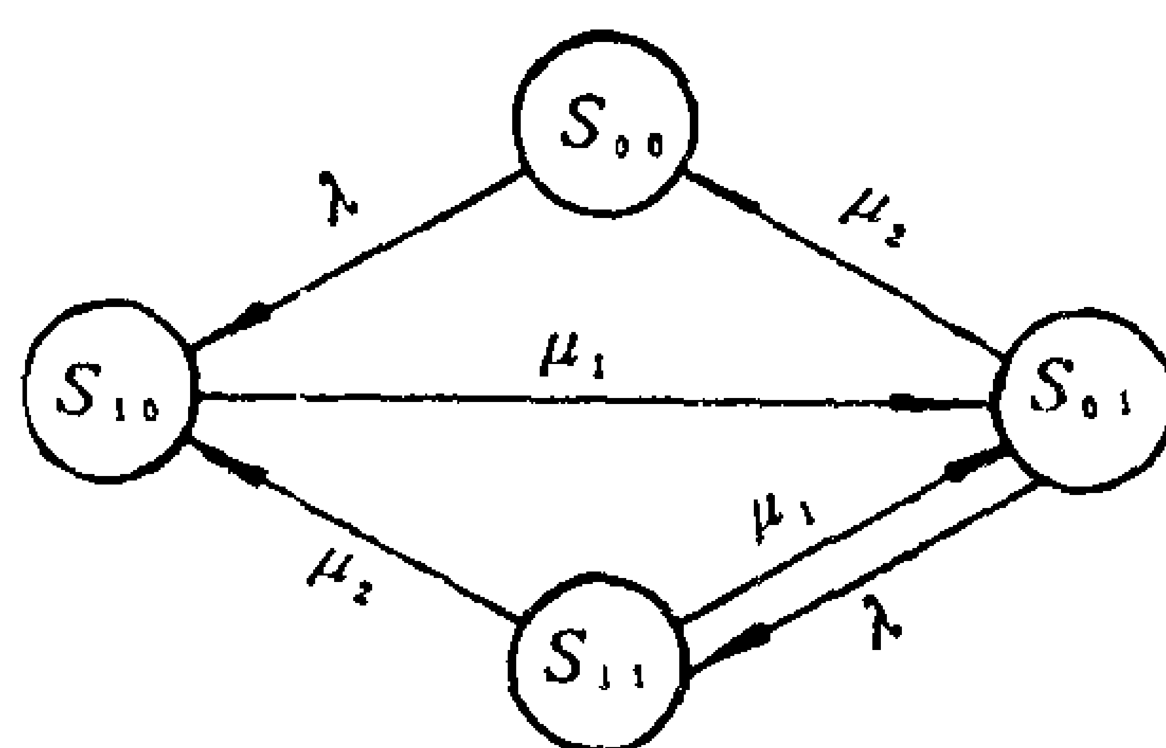



图10.9

根据生、灭图和建立哥尔莫可尔夫方程的一般法则，我们有：

对$S_{00}$　　$\lambda p_{00}=\mu_2 p_{01}$；

对$S_{01}$　　$\lambda p_{01}+\mu_2 p_{01}=\mu_1 p_{10}+\mu_1 p_{11}$；

对$S_{10}$ $\quad \mu_1 p_{10}=\lambda p_{00}+\mu_2 p_{11}$；

对$S_{11}$ $\quad \mu_1 p_{11}+\mu_2 p_{11}=\lambda p_{01}$。

求解这组方程可得：

$$p_{00}=\frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_1)},$$

$$p_{10}=\frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\mu_1+\mu_2)},$$

$$p_{01}=\frac{\lambda\mu_1}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)},$$

$$p_{11}=\frac{\lambda^2\mu_{11}}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}.$$

损失的概率，即敌人目标不受射击的概率：

$$P_{损}=1-\frac{\mu_2(p_{01}+p_{11})}{\lambda}=1-\frac{\mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}$$

现在我们用具体数值代入。

设在我侦察系统和地一地导导弹火力控制系统的作用区内，单位时间内出现$\lambda=2$个目标。在战斗态势下、侦察系统每单位时间可发现两个目标，$\mu_1=2$；而火、控系统平均可以处理$\mu_2=4$个目标。试求出敌人目标受到射击的概率。

**解** 敌人目标受到射击的概率就是损失的对立事件：

$$P=1-P_{损}=\frac{\mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}=0.44.$$

如果采用不完善的火控系统，即$\mu_2=2$时，

$$P=0.38.$$

如果考虑系统的经济性，可计算得系统的最优参数。

**106** 防空系统由三道防线组成。每道防线上配备同类型武器。每道防线的能力不同(或武器类型不同)。设 $\mu_1=1$，$\mu_2=0.5$，$\mu_3=0.2$。服务时间是指数分布。敌机来犯强度 $\lambda=5$架/

分钟试求防空系统效率。

**解** 本题是由三道防线组成的系统。

1） 三道防线都空闲着的概率可按下式计算：

$$p_{000}=\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)}.$$

2） 第一、第二两道防线空着，第三道防线正向敌机射击的概率：

$$p_{001}=\frac{\lambda\mu_1\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)}.$$

3） 第一道防线空着，其后面两道防线忙着的概率

$$p_{011}=\frac{\lambda^2\mu_1^2\mu_2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}.$$

4） 第二道防线空着，一、三道防线忙着的概率

$$p_{101}=\frac{\lambda^2\mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2+\mu_3)}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)(\mu_1+\mu_3)}.$$

5） 第一道和第三道防线空着，第二道防线忙着的概率

$$p_{010}=\frac{\lambda\mu_1[(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)+\lambda\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2+\mu_3)]}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}.$$

6） 第一、第二两道防线忙着，第三道空着的概率：

$$p_{110}=\frac{\lambda^2\mu_1[(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_3)-\lambda\mu_1\mu_2]}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}.$$

7）

$$p_{100}=\frac{\lambda\mu_2\mu_3[\lambda(\lambda+\mu_1+\mu_2+\mu_3)+(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)]}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}.$$

8）

$$p_{111}=\frac{\lambda^3\mu_1^2\mu_2}{(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)(\lambda+\mu_3)(\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_3)(\mu_2+\mu_3)}.$$

把数值代入上式得

$$p_{111}=\frac{5^3 1^2\times 0.5}{(5+1)(5+0.5)(5+0.2)(1+0.5)(1+0.2)(0.5+0.2)}$$

$=0.29$。

∴ $\qquad P_{服}=1-p_{111}=0.71$。

即将有29%的敌机进入我设施上空。

$$p_{000}=\frac{1\times 0.5\times 0.2}{(5+1)(5+0.5)(5+0.2)}=0.006\text{。}$$

即系统负荷很高。

**107** 设攻击方配备两座武器。射击一个目标平均需要2分钟。对目标射击时，击毁目标的概率为$p=0.8$。侦察系统每分钟平均发现一个目标。目标被发现后，在原处逗留时间平均为4分钟($\bar{t}_{停}=4$分钟)。试求攻击方武器系统效率。

**解** 本题是用排队时间有限的混合制系统的排队模型估计武器的射击效率。

系统的效率指标可见第七章§11。

$$p_0=\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{e^r}{\prod\limits_{m=1}^{r}(n+m\beta)}}\text{。}$$

式中 $\qquad \rho=\frac{\lambda}{\mu}$；$\beta=\frac{r}{\mu}$。

被发现的目标遭到射击的概率为

$$P_{服}=1-\frac{\beta}{\rho}\cdot\frac{\frac{\rho^n}{n!}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{r\rho^r}{\prod\limits_{m=1}^{r}(n+m\beta)}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^k}{k!}+\frac{\rho^n}{n!}\frac{\rho^r}{\prod\limits_{m=1}^{r}(n+m\beta)}}\text{。}$$

用$P$表示在对目标进行射击的条件下，击毁目标的条件概率，则击毁发现的目标的概率为 $P_{毁}=P_{服}P$。

现在我们计算具体数值。

今知，$\mu=0.5$，$r=0.25$ $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=2$，$\beta=\dfrac{r}{\mu}=0.5$

根据 $n=2$，$\rho=2$，$\beta=0.5$查表[III]可得

发现的目标未遭攻击的概率值为0.225. 于是攻击方武器系统的效率指标

$$P_{毁}=P(1-0.225)=0.8(1-0.225)=0.62。$$

**108** 设有$n=3$个活动维修站。以便修理10座武器($m=0$)。经验表明，每座武器平均每月修理一次，即$\lambda=1$。平均修理时间为6天。试求修理系统效率指标。

**解** 设要求修理的武器流，受装备该种武器的连队数量所限制，并假设它服从最简单流，其强度为$\lambda$。服务（修理）时间为指数分布，其强度为$\mu$。

因此，本系统是多通道封闭式服务系统，其效率指标见第七章§13。

1）所有$n$个修配厂都空闲着的概率：

$$p_0=\left[1+m\rho+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots1}{n!n^{m-n}}\rho^m\right]^{-1}$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{m!\rho^k}{k!(m-k)!}+\sum_{n-1}^{m}\frac{m!\rho^k}{n^{k-n}n!(m-k)!}\right]^{-1}$$

2）有$k$个修配厂在修理武器的概率：

$$p_k=\frac{m!\rho^k p_0}{k!(m-k)!}\qquad(1\leqslant k\leqslant m)。$$

3）当$k>n$时，所有$n$个修配厂都在修理武器，有$k-m$座武器排队待修。其状态概率

$$p_k = \frac{m!\rho^k p_0}{n^{k-n} n!(m-k)!}.$$

4）正在修理和排队等待修理的武器的平均数：

$$L_{系} = M_1 = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{m!\rho^k}{(k-1)!(m-k)!} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k\rho^k m!}{n^{k-n} n!(m-k)!}\right] p_0.$$

5）排队等待修理的武器的平均数.

$$L_{队} = M_2 = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n)m!\rho^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} p_0.$$

6）排队等待修理武器的平均百分率：

$$k_2 = \frac{L_{队}}{m} \times 100\%.$$

7）空闲着的修配厂的平均数

$$L_{空} = M_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)m!\rho^k}{k!(m-k)!} p_0.$$

8）修配厂空闲的平均百分率

$$k_3 = \frac{M_3}{n} \times 100\%$$

今有：$\lambda=1$，$n=3$，$m=10$，$\mu=5$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.2$.

为了求$p_0$我们列成下表：

| $K$ | $\frac{P_K}{P_0}$ | $P_K$ | $KP_K$ | $(K-n)P_K$ | $(n-K)P_K$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.1548 | 0 | — | 0.4644 |
| 1 | 2 | 0.3696 | 0.3096 | — | 0.6192 |
| 2 | 1.8 | 0.2786 | 0.5572 | — | 0.2786 |
| 3 | 0.96 | 0.1486 | 0.4458 | — | 0. |
| 4 | 0.448 | 0.0693 | 0.2772 | 0.0693 | — |
| 5 | 0.179 | 0.0277 | 0.1385 | 0.0554 | — |
| 6 | 0.056 | 0.0087 | 0.0522 | 0.0261 | — |
| 7 | 0.012 | 0.0018 | 0.0126 | 0.0072 | — |
| 8 | 0.0025 | 0.0004 | 0.0032 | 0.0020 | — |
| 9 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0006 | — |
| 10 | 0. | 0. | 0. | 0. | — |
| | $\Sigma=6.4579$ | $\Sigma=1.0$ | $M_1=1.797$ | $M_2=0.16$ | $M_3=1.36$ |

由表可见，三个维修站全部空闲的概率

$$p_0=0.1548$$

$$30\times0.1548=4.5\text{天}$$

即每月约有4.5天厂修日.

排队等待修理的武器的平均数

$$L_{\text{队}}=M_2=0.16\text{座}$$

因此，排队等待修理的平均百分率

$$k_2=\frac{L_{\text{队}}}{m}\times100\%=1.6\%.$$

下面讨论维修厂的合理负荷，空闲着的修配厂的平均数.

$$M_3=\sum_{k=0}^{n}(n-k)p_k=1.36(\text{个}),$$

所以 $k_3=\frac{M_3}{n}\times100\%=\frac{1.36}{3}\times100\%=46\%.$

$L_{\text{系}}$是不能参加战斗的武器平均数

$$L_{系}=\sum kp_k=1.7972.$$

因此，有故障武器的百分率为

$$k_1=\frac{L_{系}}{m}\times 100\%=17.9\%.$$

**109** 为了保卫海防，派出10艘军舰巡逻．若军舰在巡逻途中出故障，便立即送到船坞修理．设一个船坞只能修一只舰．根据要求，处于战备状态的军舰不得少于8艘．问如果有两个船坞，能否满足要求?

**解** 已知每月平均需要修理$\lambda=0.02$只军舰．船坞每月平均能修$\mu=0.5$只军舰．有两个船坞$n=2$．系统内有军舰$m=10$只．本题为封闭式系统．

有$k$只军舰需要修理的概率：

$$p_k=\frac{m!\rho^k}{k!(m-k)!}p_0=\frac{10!p_0}{k!(10-k)!}\left(\frac{0.02}{0.5}\right)^k, k=1,2.$$

$$p_k=\frac{10!p_0}{2^{k-2}2!(10-k)!}\left(\frac{0.02}{0.5}\right)^k, k>2.$$

需要修理军舰的平均数为：

$M=\sum_{k=0}^{10}kp_k=0.3946$，因此，可有9只军舰处于戒备状态．

值勤军舰不少于8只的概率：

$$p(\geqslant 8)=p_0+p_1+p_2=0.962.$$

$$p_0=0.6235$$

船坞利用率$\rho=1-p_0=0.3765$．

因此，有一个修船坞已经绰绰有余．

**110** 高炮阵地上有四门火炮．对敌机瞄准射击的平均时间为2分钟．敌机按泊松流来犯，平均每分钟到达1.5架．瞄准、

射击时间服从指数分布。如果敌机已到射击区域，高炮还未瞄准，敌机突破防空区。试求突防的概率。

**解** 已知$\frac{1}{\mu}=2$，$\lambda=1.5$，$n=4$，$\therefore \quad \rho=3$.

本系统为多通道损失制系统。敌机为顾客四门火炮为四个服务员。

$$P_{损}=P_4=\frac{3^4}{4!}\left[1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}\right]^{-1}=0.235.$$

即敌机突防的概率有23.5%。

附　录 (1)

拉普拉斯函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ 表

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0000 | 0.29 | 0.1141 | 0.58 | 0.2190 | 0.87 | 0.3078 |
| 0.01 | 0.0040 | 0.30 | 0.1179 | 0.59 | 0.2224 | 0.88 | 0.3106 |
| 0.02 | 0.0080 | 0.31 | 0.1217 | 0.60 | 0.2257 | 0.89 | 0.3133 |
| 0.03 | 0.0120 | 0.32 | 0.1255 | 0.61 | 0.2291 | 0.90 | 0.3159 |
| 0.04 | 0.0160 | 0.33 | 0.1293 | 0.62 | 0.2324 | 0.91 | 0.3186 |
| 0.05 | 0.0199 | 0.34 | 0.1331 | 0.63 | 0.2357 | 0.92 | 0.3212 |
| 0.06 | 0.0239 | 0.35 | 0.1368 | 0.64 | 0.2389 | 0.93 | 0.3238 |
| 0.07 | 0.0279 | 0.36 | 0.1406 | 0.65 | 0.2422 | 0.94 | 0.3264 |
| 0.08 | 0.0319 | 0.37 | 0.1443 | 0.66 | 0.2454 | 0.95 | 0.3289 |
| 0.09 | 0.0359 | 0.38 | 0.1480 | 0.67 | 0.2486 | 0.96 | 0.3315 |
| 0.10 | 0.0398 | 0.39 | 0.1517 | 0.68 | 0.2517 | 0.97 | 0.3340 |
| 0.11 | 0.0438 | 0.40 | 0.1554 | 0.69 | 0.2549 | 0.98 | 0.3365 |
| 0.12 | 0.0478 | 0.41 | 0.1591 | 0.70 | 0.2580 | 0.99 | 0.3389 |
| 0.13 | 0.0517 | 0.42 | 0.1653 | 0.71 | 0.2611 | 1.00 | 0.3413 |
| 0.14 | 0.0557 | 0.43 | 0.1661 | 0.72 | 0.2642 | 1.01 | 0.3438 |
| 0.15 | 0.0596 | 0.44 | 0.1700 | 0.73 | 0.2673 | 1.02 | 0.3461 |
| 0.16 | 0.0636 | 0.45 | 0.1736 | 0.74 | 0.2703 | 1.03 | 0.3485 |
| 0.17 | 0.0675 | 0.46 | 0.1772 | 0.75 | 0.2734 | 1.04 | 0.3508 |
| 0.18 | 0.0714 | 0.47 | 0.1803 | 0.76 | 0.2764 | 1.05 | 0.3531 |
| 0.19 | 0.0753 | 0.48 | 0.1844 | 0.77 | 0.2794 | 1.06 | 0.3554 |
| 0.20 | 0.0793 | 0.49 | 0.1879 | 0.78 | 0.2823 | 1.07 | 0.3577 |
| 0.21 | 0.0832 | 0.50 | 0.1915 | 0.79 | 0.2852 | 1.08 | 0.3599 |
| 0.22 | 0.0871 | 0.51 | 0.1950 | 0.80 | 0.2881 | 1.09 | 0.3621 |
| 0.23 | 0.0910 | 0.52 | 0.1985 | 0.81 | 0.2910 | 1.10 | 0.3643 |
| 0.24 | 0.0948 | 0.53 | 0.2019 | 0.82 | 0.2939 | 1.11 | 0.3665 |
| 0.25 | 0.0987 | 0.54 | 0.2054 | 0.83 | 0.2967 | 1.12 | 0.3686 |
| 0.26 | 0.1026 | 0.55 | 0.2088 | 0.84 | 0.2995 | 1.13 | 0.3708 |
| 0.27 | 0.1064 | 0.56 | 0.2123 | 0.85 | 0.3023 | 1.14 | 0.3729 |
| 0.28 | 0.1103 | 0.57 | 0.2157 | 0.86 | 0.3051 | 1.15 | 0.3749 |

续附录（1）

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.16 | 0.3770 | 1.52 | 0.4357 | 1.88 | 0.4699 | 2.48 | 0.4934 |
| 1.17 | 0.3790 | 1.53 | 0.4370 | 1.89 | 0.4706 | 2.50 | 0.4938 |
| 1.18 | 0.3810 | 1.54 | 0.4382 | 1.90 | 0.4713 | 2.52 | 0.4941 |
| 1.19 | 0.3830 | 1.55 | 0.4394 | 1.91 | 0.4719 | 2.54 | 0.4945 |
| 1.20 | 0.3849 | 1.56 | 0.4406 | 1.92 | 0.4726 | 2.56 | 0.4948 |
| 1.21 | 0.3869 | 1.57 | 0.4418 | 1.93 | 0.4732 | 2.58 | 0.4951 |
| 1.22 | 0.3883 | 1.58 | 0.4429 | 1.94 | 0.4738 | 2.60 | 0.4953 |
| 1.23 | 0.3907 | 1.59 | 0.4441 | 1.95 | 0.4744 | 2.62 | 0.4956 |
| 1.24 | 0.3925 | 1.60 | 0.4452 | 1.96 | 0.4750 | 2.64 | 0.4959 |
| 1.25 | 0.3944 | 1.61 | 0.4463 | 1.97 | 0.4756 | 2.66 | 0.4961 |
| 1.26 | 0.3962 | 1.62 | 0.4474 | 1.98 | 0.4761 | 2.68 | 0.4963 |
| 1.27 | 0.3980 | 1.63 | 0.4484 | 1.99 | 0.4767 | 2.70 | 0.4965 |
| 1.28 | 0.3997 | 1.64 | 0.4495 | 2.00 | 0.4772 | 2.72 | 0.4967 |
| 1.29 | 0.4015 | 1.65 | 0.4505 | 2.02 | 0.4783 | 2.74 | 0.4969 |
| 1.30 | 0.4032 | 1.66 | 0.4515 | 2.04 | 0.4793 | 2.76 | 0.4971 |
| 1.31 | 0.4049 | 1.67 | 0.4525 | 2.06 | 0.4803 | 2.78 | 0.4973 |
| 1.32 | 0.4066 | 1.68 | 0.4535 | 2.08 | 0.4812 | 2.80 | 0.4974 |
| 1.33 | 0.4082 | 1.69 | 0.4545 | 2.10 | 0.4821 | 2.82 | 0.4976 |
| 1.34 | 0.4099 | 1.70 | 0.4554 | 2.12 | 0.4830 | 2.84 | 0.4977 |
| 1.35 | 0.4115 | 1.71 | 0.4564 | 2.14 | 0.4838 | 2.86 | 0.4979 |
| 1.36 | 0.4131 | 1.72 | 0.4573 | 2.16 | 0.4846 | 2.88 | 0.4980 |
| 1.37 | 0.4147 | 1.73 | 0.4582 | 2.18 | 0.4854 | 2.90 | 0.4981 |
| 1.38 | 0.4162 | 1.74 | 0.4591 | 2.20 | 0.4861 | 2.92 | 0.4982 |
| 1.39 | 0.4177 | 1.75 | 0.4599 | 2.22 | 0.4868 | 2.94 | 0.4984 |
| 1.40 | 0.4192 | 1.76 | 0.4608 | 2.24 | 0.4875 | 2.96 | 0.4985 |
| 1.41 | 0.4207 | 1.77 | 0.4616 | 2.26 | 0.4881 | 2.98 | 0.4986 |
| 1.42 | 0.4222 | 1.78 | 0.4625 | 2.28 | 0.4887 | 3.00 | 0.49865 |
| 1.43 | 0.4236 | 1.79 | 0.4633 | 2.30 | 0.4893 | 3.20 | 0.49931 |
| 1.44 | 0.4251 | 1.80 | 0.4641 | 2.32 | 0.4898 | 3.40 | 0.49966 |
| 1.45 | 0.4265 | 1.81 | 0.4649 | 2.34 | 0.4904 | 3.60 | 0.499841 |
| 1.46 | 0.4279 | 1.82 | 0.4656 | 2.36 | 0.4909 | 3.80 | 0.499928 |
| 1.47 | 0.4292 | 1.83 | 0.4664 | 2.38 | 0.4913 | 4.00 | 0.499968 |
| 1.48 | 0.4306 | 1.84 | 0.4671 | 2.40 | 0.4918 | 4.50 | 0.499997 |
| 1.49 | 0.4319 | 1.85 | 0.4678 | 2.42 | 0.4922 | 5.00 | 0.499997 |
| 1.50 | 0.4332 | 1.86 | 0.4686 | 2.44 | 0.4927 | | |
| 1.51 | 0.4345 | 1.87 | 0.4693 | 2.46 | 0.4931 | | |

**附录2** 函数$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$表

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0.1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0.2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0.3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0.4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0.5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0.6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0.7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0.8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0.9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1.0 | 0.2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1.1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1.2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1.3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1.4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1.5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1.6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1.7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1.8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1.9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |

续附录2

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 0.0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2.1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2.2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2.3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2.4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2.5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2.6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2.7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2.8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2.9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3.0 | 0.0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3.1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3.2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3.3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3.4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3.5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3.6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3.7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3.8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3.9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

附录3　　临界点的$\chi^2_{临}$分布表

| 自由度 $R$ | 显著性水平 $\alpha$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
| 1 | 6.6 | 5.0 | 3.8 | 0.0039 | 0.00098 | 0.00016 |
| 2 | 9.2 | 7.4 | 6.0 | 0.103 | 0.051 | 0.020 |
| 3 | 11.3 | 9.4 | 7.8 | 0.352 | 0.216 | 0.115 |
| 4 | 13.3 | 11.1 | 9.5 | 0.711 | 0.484 | 0.297 |
| 5 | 15.1 | 12.8 | 11.1 | 1.15 | 0.831 | 0.554 |
| 6 | 16.8 | 14.4 | 12.6 | 1.64 | 1.24 | 0.872 |
| 7 | 18.5 | 16.0 | 14.1 | 2.17 | 1.69 | 1.24 |
| 8 | 20.1 | 17.5 | 15.5 | 2.73 | 2.18 | 1.65 |
| 9 | 21.7 | 19.0 | 16.9 | 3.33 | 2.70 | 2.09 |
| 10 | 23.2 | 20.5 | 18.3 | 3.94 | 3.25 | 2.56 |
| 11 | 24.7 | 21.9 | 19.7 | 4.57 | 3.82 | 3.05 |
| 12 | 26.2 | 23.3 | 21.0 | 5.23 | 4.40 | 3.57 |
| 13 | 27.7 | 24.7 | 22.4 | 5.89 | 5.01 | 4.11 |
| 14 | 29.1 | 26.1 | 23.7 | 6.57 | 5.63 | 4.66 |
| 15 | 30.6 | 27.5 | 25.0 | 7.26 | 6.26 | 5.23 |
| 16 | 32.0 | 28.8 | 26.3 | 7.96 | 6.91 | 5.81 |
| 17 | 33.4 | 30.2 | 27.6 | 8.67 | 7.56 | 6.41 |
| 18 | 34.8 | 31.5 | 28.9 | 9.39 | 8.23 | 7.01 |
| 19 | 36.2 | 32.9 | 30.1 | 10.1 | 8.91 | 7.63 |
| 20 | 37.6 | 34.2 | 31.4 | 10.9 | 9.59 | 8.26 |
| 21 | 38.9 | 35.5 | 32.7 | 11.6 | 10.3 | 8.90 |
| 22 | 40.3 | 36.8 | 33.9 | 12.3 | 11.0 | 9.54 |
| 23 | 41.6 | 38.1 | 35.2 | 13.1 | 11.7 | 10.2 |
| 24 | 43.0 | 39.4 | 36.4 | 13.8 | 12.4 | 10.9 |
| 25 | 44.3 | 40.6 | 37.7 | 14.6 | 13.1 | 11.5 |
| 26 | 45.6 | 41.9 | 38.9 | 15.4 | 13.8 | 12.2 |
| 27 | 47.0 | 43.2 | 40.1 | 16.2 | 14.6 | 12.9 |
| 28 | 48.3 | 44.5 | 41.3 | 16.9 | 15.3 | 13.6 |
| 29 | 49.6 | 45.7 | 42.6 | 17.7 | 16.0 | 14.3 |
| 30 | 50.9 | 47.0 | 43.8 | 18.5 | 16.8 | 15.0 |

## 附录4　　随　机　数　表

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| 10 09 73 25 33 | 76 52 01 35 86 | 34 67 35 48 76 | 80 95 90 91 17 |
| 37 54 20 48 05 | 64 89 47 42 96 | 24 80 52 40 37 | 20 63 61 04 02 |
| 08 42 26 89 53 | 19 64 50 93 03 | 23 20 90 25 60 | 15 95 33 47 64 |
| 99 01 90 25 29 | 09 37 67 07 15 | 38 31 13 11 65 | 88 67 67 43 97 |
| 12 80 79 99 70 | 80 15 73 61 47 | 64 03 23 66 53 | 98 95 11 68 77 |
|  |  |  |  |
| 66 06 57 47 17 | 34 07 27 68 50 | 36 69 73 61 70 | 65 81 33 98 85 |
| 31 06 01 08 05 | 45 57 18 24 06 | 35 30 34 26 14 | 86 79 90 74 39 |
| 85 26 97 76 02 | 02 05 16 56 92 | 68 66 57 48 18 | 73 05 38 52 47 |
| 63 57 33 21 35 | 05 32 54 70 48 | 90 55 35 75 48 | 28 46 82 87 09 |
| 73 79 64 57 53 | 03 52 96 47 78 | 35 80 83 42 82 | 60 93 52 03 44 |
|  |  |  |  |
| 98 52 01 77 67 | 14 90 56 86 07 | 22 10 94 05 58 | 60 97 09 34 33 |
| 11 80 50 54 31 | 39 80 82 77 32 | 50 72 56 82 48 | 29 40 52 42 01 |
| 83 45 29 96 34 | 06 28 89 80 83 | 13 74 67 00 78 | 18 47 54 06 10 |
| 88 68 54 02 00 | 86 50 75 84 01 | 36 76 66 79 51 | 90 36 47 64 93 |
| 99 59 46 73 48 | 87 51 76 49 69 | 91 82 60 89 28 | 93 78 56 13 68 |
|  |  |  |  |
| 65 48 11 76 74 | 17 46 85 09 50 | 58 04 77 69 74 | 73 03 95 71 86 |
| 80 12 43 56 35 | 17 72 70 80 15 | 45 31 82 23 74 | 21 11 57 82 53 |
| 74 35 09 98 17 | 77 40 27 72 14 | 43 23 60 02 10 | 45 52 16 42 37 |
| 69 91 62 68 03 | 66 25 22 91 48 | 36 93 68 72 03 | 76 62 11 39 90 |
| 09 89 32 05 05 | 14 22 56 85 14 | 46 42 75 67 88 | 96 29 77 88 22 |
|  |  |  |  |
| 91 49 91 45 23 | 68 47 92 76 86 | 46 16 28 35 54 | 94 75 08 99 23 |
| 80 33 69 45 98 | 26 94 03 68 58 | 70 29 73 41 35 | 53 14 03 33 40 |
| 44 10 48 19 49 | 85 15 74 79 54 | 32 97 92 65 75 | 57 60 04 08 81 |
| 12 55 07 37 42 | 11 10 00 20 40 | 12 86 07 46 97 | 96 64 48 94 39 |
| 63 60 64 93 29 | 16 50 53 44 84 | 40 21 95 25 63 | 43 65 17 70 82 |

**附录4续**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 61 19 69 04 46 | 26 45 74 77 74 | 51 92 43 37 29 | 65 39 45 95 93 |
| 15 47 44 52 66 | 95 27 07 99 53 | 59 36 78 38 48 | 82 39 61 01 18 |
| 94 55 72 85 73 | 67 89 75 43 87 | 54 62 24 44 31 | 91 19 04 25 92 |
| 42 48 11 62 13 | 97 34 40 87 21 | 16 86 84 87 67 | 03 07 11 20 59 |
| 23 52 37 83 17 | 73 20 88 98 37 | 68 93 59 14 16 | 26 25 22 96 63 |
| | | | |
| 04 49 35 24 94 | 75 24 63 38 24 | 45 86 25 10 25 | 61 96 27 93 86 |
| 00 54 99 76 54 | 64 05 18 81 59 | 96 11 96 38 96 | 54 69 28 28 91 |
| 35 96 31 53 07 | 26 89 80 93 54 | 33 35 13 54 62 | 77 97 45 00 24 |
| 59 80 80 83 91 | 45 42 72 68 42 | 83 60 94 97 00 | 13 02 12 48 92 |
| 46 05 88 52 36 | 01 39 09 22 86 | 77 28 14 40 77 | 93 91 08 36 47 |
| | | | |
| 32 17 90 05 97 | 87 37 92 52 41 | 05 56 70 70 07 | 86 74 31 71 57 |
| 69 23 46 14 06 | 20 11 74 52 04 | 15 95 66 00 00 | 18 74 39 24 23 |
| 19 56 54 14 30 | 01 75 87 53 79 | 40 41 92 15 85 | 66 67 43 68 06 |
| 45 15 51 49 38 | 19 47 60 72 46 | 43 66 79 45 43 | 59 04 79 00 33 |
| 94 86 43 19 94 | 36 16 81 08 51 | 34 88 88 15 53 | 01 54 03 54 56 |
| | | | |
| 98 08 62 48 26 | 45 24 02 84 04 | 44 99 90 88 96 | 39 09 47 34 07 |
| 33 18 51 62 32 | 41 94 15 09 49 | 89 43 54 85 81 | 88 69 54 19 94 |
| 80 95 10 04 06 | 96 38 27 07 74 | 20 15 12 33 87 | 25 01 62 52 98 |
| 79 75 24 91 40 | 71 96 12 82 96 | 69 86 10 25 91 | 74 85 22 05 39 |
| 18 63 33 25 37 | 98 14 50 65 71 | 31 01 02 46 74 | 05 45 56 14 27 |
| | | | |
| 74 02 94 39 02 | 77 55 73 22 70 | 97 79 01 71 19 | 52 52 75 80 21 |
| 54 17 84 56 11 | 80 99 33 71 43 | 05 33 51 29 69 | 56 12 71 92 55 |
| 11 66 44 98 83 | 52 07 98 48 27 | 59 38 17 15 39 | 09 97 33 34 19 |
| 48 32 47 79 28 | 31 24 96 47 10 | 02 29 53 68 70 | 32 30 75 75 46 |
| 69 07 49 41 38 | 87 63 79 19 76 | 35 58 40 44 01 | 10 51 82 16 15 |

## 附录5　限　定　排　队　表　N＝10

（摘自L.G.Peck和R.N.Hazlewood“限定排队表”）

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| 0.008 | 1 | 0.072 | 0.999 |
| 0.013 | 1 | 0.117 | 0.998 |
| 0.016 | 1 | 0.144 | 0.997 |
| 0.019 | 1 | 0.170 | 0.996 |
| 0.021 | 1 | 0.188 | 0.995 |
| 0.023 | 1 | 0.206 | 0.994 |
| 0.025 | 1 | 0.224 | 0.993 |
| 0.026 | 1 | 0.232 | 0.992 |
| 0.028 | 1 | 0.250 | 0.991 |
| 0.030 | 1 | 0.268 | 0.990 |
| 0.032 | 2 | 0.033 | 0.999 |
| | 1 | 0.285 | 0.988 |
| 0.034 | 2 | 0.037 | 0.999 |
| | 1 | 0.302 | 0.986 |
| 0.036 | 2 | 0.041 | 0.999 |
| | 1 | 0.320 | 0.984 |
| 0.038 | 2 | 0.046 | 0.999 |
| | 1 | 0.337 | 0.982 |
| 0.040 | 2 | 0.050 | 0.999 |
| | 1 | 0.354 | 0.980 |
| 0.042 | 2 | 0.055 | 0.999 |
| | 1 | 0.371 | 0.978 |
| 0.044 | 2 | 0.060 | 0.998 |
| | 1 | 0.388 | 0.975 |
| 0.046 | 2 | 0.065 | 0.998 |
| | 1 | 0.404 | 0.973 |
| 0.048 | 2 | 0.071 | 0.998 |
| | 1 | 0.421 | 0.970 |
| 0.050 | 2 | 0.076 | 0.998 |
| | 1 | 0.437 | 0.967 |
| 0.052 | 2 | 0.082 | 0.997 |
| | 1 | 0.454 | 0.963 |

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| 0.054 | 2 | 0.088 | 0.997 |
| | 1 | 0.470 | 0.960 |
| 0.056 | 2 | 0.094 | 0.997 |
| | 1 | 0.486 | 0.956 |
| 0.058 | 2 | 0.100 | 0.996 |
| | 1 | 0.501 | 0.953 |
| 0.060 | 2 | 0.106 | 0.996 |
| | 1 | 0.517 | 0.949 |
| 0.062 | 2 | 0.113 | 0.996 |
| | 1 | 0.532 | 0.945 |
| 0.064 | 2 | 0.119 | 0.995 |
| | 1 | 0.547 | 0.940 |
| 0.066 | 2 | 0.126 | 0.995 |
| | 1 | 0.562 | 0.936 |
| 0.068 | 3 | 0.020 | 0.999 |
| | 2 | 0.133 | 0.994 |
| | 1 | 0.577 | 0.931 |
| 0.070 | 3 | 0.022 | 0.999 |
| | 2 | 0.140 | 0.994 |
| | 1 | 0.591 | 0.926 |
| 0.075 | 3 | 0.026 | 0.999 |
| | 2 | 0.158 | 0.992 |
| | 1 | 0.627 | 0.913 |
| 0.080 | 3 | 0.031 | 0.999 |
| | 2 | 0.177 | 0.990 |
| | 1 | 0.660 | 0.999 |
| 0.085 | 3 | 0.037 | 0.999 |
| | 2 | 0.196 | 0.988 |
| | 1 | 0.692 | 0.883 |
| 0.090 | 3 | 0.043 | 0.898 |
| | 2 | 0.216 | 0.986 |
| | 1 | 0.722 | 0.867 |

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| 0.095 | 3 | 0.049 | 0.998 |
| | 2 | 0.237 | 0.984 |
| | 1 | 0.750 | 0.850 |
| 0.100 | 3 | 0.056 | 0.998 |
| | 2 | 0.258 | 0.981 |
| | 1 | 0.776 | 0.832 |
| 0.105 | 3 | 0.064 | 0.997 |
| | 2 | 0.279 | 0.978 |
| | 1 | 0.800 | 0.814 |
| 0.110 | 3 | 0.072 | 0.997 |
| | 2 | 0.301 | 0.974 |
| | 1 | 0.822 | 0.795 |
| 0.115 | 3 | 0.081 | 0.996 |
| | 2 | 0.324 | 0.971 |
| | 1 | 0.843 | 0.776 |
| 0.120 | 4 | 0.016 | 0.999 |
| | 3 | 0.090 | 0.995 |
| | 2 | 0.346 | 0.967 |
| | 1 | 0.861 | 0.756 |
| 0.125 | 4 | 0.019 | 0.999 |
| | 3 | 0.100 | 0.994 |
| | 2 | 0.369 | 0.962 |
| | 1 | 0.878 | 0.737 |
| 0.130 | 4 | 0.022 | 0.999 |
| | 3 | 0.110 | 0.994 |
| | 2 | 0.392 | 0.958 |
| | 1 | 0.893 | 0.718 |
| 0.135 | 4 | 0.025 | 0.999 |
| | 3 | 0.121 | 0.993 |
| | 2 | 0.415 | 0.952 |
| | 1 | 0.907 | 0.699 |
| 0.140 | 4 | 0.028 | 0.999 |
| | 3 | 0.132 | 0.991 |
| | 2 | 0.437 | 0.947 |

附录5续1

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| | 1 | 0.919 | 0.680 |
| 0.145 | 4 | 0.032 | 0.999 |
| | 3 | 0.144 | 0.990 |
| | 2 | 0.460 | 0.941 |
| | 1 | 0.929 | 0.662 |
| 0.150 | 4 | 0.036 | 0.998 |
| | 3 | 0.156 | 0.989 |
| | 2 | 0.483 | 0.935 |
| | 1 | 0.939 | 0.644 |
| 0.155 | 4 | 0.040 | 0.998 |
| | 3 | 0.169 | 0.987 |
| | 2 | 0.505 | 0.928 |
| | 1 | 0.947 | 0.627 |
| 0.160 | 4 | 0.044 | 0.998 |
| | 3 | 0.182 | 0.986 |
| | 2 | 0.528 | 0.921 |
| | 1 | 0.954 | 0.610 |
| 0.165 | 4 | 0.049 | 0.997 |
| | 3 | 0.195 | 0.984 |
| | 2 | 0.550 | 0.914 |
| | 1 | 0.961 | 0.594 |
| 0.170 | 4 | 0.054 | 0.997 |
| | 3 | 0.209 | 0.982 |
| | 2 | 0.571 | 0.906 |
| | 1 | 0.966 | 0.579 |
| 0.180 | 5 | 0.013 | 0.999 |
| | 4 | 0.066 | 0.996 |
| | 3 | 0.238 | 0.978 |
| | 2 | 0.614 | 0.890 |
| | 1 | 0.975 | 0.549 |
| 0.190 | 5 | 0.016 | 0.999 |
| | 4 | 0.078 | 0.995 |
| | 3 | 0.269 | 0.973 |
| | 2 | 0.654 | 0.873 |

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| | 1 | 0.982 | 0.522 |
| 0.200 | 5 | 0.020 | 0.999 |
| | 4 | 0.092 | 0.994 |
| | 3 | 0.300 | 0.968 |
| | 2 | 0.692 | 0.854 |
| | 1 | 0.987 | 0.497 |
| 0.210 | 5 | 0.025 | 0.999 |
| | 4 | 0.108 | 0.992 |
| | 3 | 0.333 | 0.961 |
| | 2 | 0.728 | 0.835 |
| | 1 | 0.990 | 0.474 |
| 0.220 | 5 | 0.030 | 0.998 |
| | 4 | 0.124 | 0.990 |
| | 3 | 0.366 | 0.954 |
| | 2 | 0.761 | 0.815 |
| | 1 | 0.993 | 0.453 |
| 0.230 | 5 | 0.037 | 0.998 |
| | 4 | 0.142 | 0.988 |
| | 3 | 0.400 | 0.947 |
| | 2 | 0.791 | 0.794 |
| | 1 | 0.995 | 0.434 |
| 0.240 | 5 | 0.044 | 0.997 |
| | 4 | 0.162 | 0.986 |
| | 3 | 0.434 | 0.938 |
| | 2 | 0.819 | 0.774 |
| | 1 | 0.996 | 0.416 |
| 0.250 | 6 | 0.010 | 0.999 |
| | 5 | 0.052 | 0.997 |
| | 4 | 0.183 | 0.983 |
| | 3 | 0.469 | 0.929 |
| | 2 | 0.844 | 0.753 |
| | 1 | 0.997 | 0.400 |
| 0.260 | 6 | 0.013 | 0.999 |
| | 5 | 0.060 | 0.996 |
| | 4 | 0.205 | 0.980 |
| | 3 | 0.503 | 0.919 |

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| | 2 | 0.866 | 0.732 |
| | 1 | 0.998 | 0.384 |
| 0.270 | 6 | 0.015 | 0.999 |
| | 5 | 0.079 | 0.995 |
| | 4 | 0.228 | 0.976 |
| | 3 | 0.587 | 0.908 |
| | 2 | 0.886 | 0.712 |
| | 1 | 0.999 | 0.370 |
| 0.280 | 6 | 0.018 | 0.999 |
| | 5 | 0.081 | 0.994 |
| | 4 | 0.252 | 0.972 |
| | 3 | 0.571 | 0.896 |
| | 2 | 0.903 | 0.692 |
| | 1 | 0.999 | 0.357 |
| 0.290 | 6 | 0.022 | 0.999 |
| | 5 | 0.093 | 0.998 |
| | 4 | 0.278 | 0.968 |
| | 3 | 0.608 | 0.884 |
| | 2 | 0.918 | 0.672 |
| | 1 | 0.999 | 0.345 |
| 0.300 | 6 | 0.026 | 0.998 |
| | 5 | 0.106 | 0.991 |
| | 4 | 0.304 | 0.963 |
| | 3 | 0.635 | 0.872 |
| | 2 | 0.932 | 0.653 |
| | 1 | 0.999 | 0.333 |
| 0.310 | 6 | 0.031 | 0.998 |
| | 5 | 0.120 | 0.990 |
| | 4 | 0.331 | 0.957 |
| | 3 | 0.666 | 0.858 |
| | 2 | 0.943 | 0.635 |
| 0.320 | 6 | 0.036 | 0.998 |
| | 5 | 0.135 | 0.988 |
| | 4 | 0.359 | 0.952 |
| | 3 | 0.695 | 0.845 |
| | 2 | 0.952 | 0.617 |
| 0.330 | 6 | 0.042 | 0.997 |
| | 5 | 0.151 | 0.986 |
| | 4 | 0.387 | 0.945 |
| | 3 | 0.723 | 0.831 |
| | 2 | 0.961 | 0.600 |

附录5续2

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| 0.340 | 7 | 0.010 | 0.999 |
| | 6 | 0.049 | 0.997 |
| | 5 | 0.168 | 0.983 |
| | 4 | 0.416 | 0.938 |
| | 3 | 0.750 | 0.816 |
| | 2 | 0.968 | 0.584 |
| 0.360 | 7 | 0.014 | 0.999 |
| | 6 | 0.064 | 0.995 |
| | 5 | 0.205 | 0.978 |
| | 4 | 0.474 | 0.923 |
| | 3 | 0.798 | 0.787 |
| | 2 | 0.978 | 0.553 |
| 0.380 | 7 | 0.019 | 0.999 |
| | 6 | 0.083 | 0.993 |
| | 5 | 0.247 | 0.971 |
| | 4 | 0.533 | 0.906 |
| | 3 | 0.840 | 0.758 |
| | 2 | 0.986 | 0.525 |
| 0.400 | 7 | 0.026 | 0.998 |
| | 6 | 0.105 | 0.991 |
| | 5 | 0.292 | 0.963 |
| | 4 | 0.591 | 0.887 |
| | 3 | 0.875 | 0.728 |
| | 2 | 0.991 | 0.499 |
| 0.420 | 7 | 0.034 | 0.998 |
| | 6 | 0.130 | 0.987 |
| | 5 | 0.341 | 0.954 |
| | 4 | 0.646 | 0.866 |
| | 3 | 0.905 | 0.700 |
| | 2 | 0.994 | 0.476 |
| 0.440 | 7 | 0.045 | 0.997 |
| | 6 | 0.160 | 0.984 |
| | 5 | 0.392 | 0.943 |
| | 4 | 0.698 | 0.845 |
| | 3 | 0.928 | 0.672 |
| | 2 | 0.996 | 0.454 |
| 0.460 | 8 | 0.011 | 0.999 |
| | 7 | 0.058 | 0.995 |
| | 6 | 0.193 | 0.979 |
| | 5 | 0.445 | 0.930 |
| | 4 | 0.747 | 0.822 |

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| | 3 | 0.917 | 0.646 |
| | 2 | 0.998 | 0.435 |
| 0.480 | 8 | 0.015 | 0.999 |
| | 7 | 0.074 | 0.994 |
| | 6 | 0.230 | 0.973 |
| | 5 | 0.499 | 0.916 |
| | 4 | 0.791 | 0.799 |
| | 3 | 0.961 | 0.621 |
| | 2 | 0.998 | 0.417 |
| 0.500 | 8 | 0.020 | 0.999 |
| | 7 | 0.093 | 0.992 |
| | 6 | 0.271 | 0.966 |
| | 5 | 0.553 | 0.901 |
| | 4 | 0.830 | 0.775 |
| | 3 | 0.972 | 0.598 |
| | 2 | 0.999 | 0.400 |
| 0.520 | 8 | 0.026 | 0.998 |
| | 7 | 0.115 | 0.989 |
| | 6 | 0.316 | 0.958 |
| | 5 | 0.606 | 0.884 |
| | 4 | 0.864 | 0.752 |
| | 3 | 0.980 | 0.575 |
| | 2 | 0.999 | 0.385 |
| 0.540 | 8 | 0.034 | 0.997 |
| | 7 | 0.141 | 0.986 |
| | 6 | 0.363 | 0.949 |
| | 5 | 0.658 | 0.867 |
| | 4 | 0.893 | 0.729 |
| | 3 | 0.986 | 0.555 |
| 0.560 | 8 | 0.044 | 0.996 |
| | 7 | 0.171 | 0.982 |
| | 6 | 0.413 | 0.939 |
| | 5 | 0.707 | 0.848 |
| | 4 | 0.917 | 0.706 |
| | 3 | 0.991 | 0.535 |
| 0.580 | 8 | 0.057 | 0.995 |
| | 7 | 0.204 | 0.977 |
| | 6 | 0.465 | 0.927 |
| | 5 | 0.753 | 0.829 |
| | 4 | 0.937 | 0.684 |
| | 3 | 0.994 | 0.517 |
| 0.600 | 9 | 0.010 | 0.999 |
| | 8 | 0.072 | 0.994 |
| | 7 | 0.242 | 0.972 |

| X | n | D | F |
|---|---|---|---|
| | 6 | 0.518 | 0.915 |
| | 5 | 0.795 | 0.809 |
| | 4 | 0.953 | 0.663 |
| | 3 | 0.996 | 0.500 |
| 0.650 | 9 | 0.021 | 0.999 |
| | 8 | 0.123 | 0.988 |
| | 7 | 0.353 | 0.954 |
| | 6 | 0.651 | 0.878 |
| | 5 | 0.882 | 0.759 |
| | 4 | 0.980 | 0.614 |
| | 3 | 0.999 | 0.461 |
| 0.700 | 9 | 0.040 | 0.997 |
| | 8 | 0.200 | 0.979 |
| | 7 | 0.484 | 0.929 |
| | 6 | 0.772 | 0.836 |
| | 5 | 0.940 | 0.711 |
| | 4 | 0.992 | 0.571 |
| 0.750 | 9 | 0.075 | 0.994 |
| | 8 | 0.307 | 0.965 |
| | 7 | 0.626 | 0.897 |
| | 6 | 0.870 | 0.792 |
| | 5 | 0.975 | 0.666 |
| | 4 | 0.998 | 0.533 |
| 0.800 | 9 | 0.134 | 0.988 |
| | 8 | 0.446 | 0.944 |
| | 7 | 0.763 | 0.859 |
| | 6 | 0.939 | 0.747 |
| | 5 | 0.991 | 0.625 |
| | 4 | 0.999 | 0.500 |
| 0.850 | 9 | 0.232 | 0.979 |
| | 8 | 0.611 | 0.916 |
| | 7 | 0.879 | 0.818 |
| | 6 | 0.978 | 0.705 |
| | 5 | 0.998 | 0.588 |
| 0.900 | 9 | 0.387 | 0.963 |
| | 8 | 0.785 | 0.881 |
| | 7 | 0.957 | 0.777 |
| | 6 | 0.995 | 0.667 |
| 0.950 | 9 | 0.630 | 0.938 |
| | 8 | 0.934 | 0.841 |
| | 7 | 0.994 | 0.737 |

附录6

泊松分布表 $p_r(a)=\frac{a^r}{r!}e^{-a}$

| r | a=0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.904 | 0.818 | 0.740 | 0.670 | 0.606 | 0.548 | 0.496 | 0.449 | 0.406 | 0.367 | 0.223 | 0.135 | 0.082 | 0.049 | 0.030 | 0.018 |
| 1 | 0.090 | 0.163 | 0.222 | 0.268 | 0.303 | 0.329 | 0.347 | 0.359 | 0.365 | 0.367 | 0.334 | 0.270 | 0.205 | 0.149 | 0.105 | 0.073 |
| 2 | 0.004 | 0.016 | 0.033 | 0.053 | 0.075 | 0.098 | 0.121 | 0.143 | 0.164 | 0.183 | 0.251 | 0.270 | 0.256 | 0.224 | 0.185 | 0.146 |
| 3 | 0.000 | 0.001 | 0.003 | 0.007 | 0.012 | 0.019 | 0.028 | 0.038 | 0.049 | 0.061 | 0.125 | 0.180 | 0.213 | 0.224 | 0.215 | 0.195 |
| 4 | — | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.003 | 0.005 | 0.007 | 0.011 | 0.015 | 0.047 | 0.090 | 0.133 | 0.168 | 0.188 | 0.195 |
| 5 | — | — | — | — | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.014 | 0.036 | 0.066 | 0.100 | 0.132 | 0.156 |
| 6 | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.003 | 0.012 | 0.027 | 0.050 | 0.077 | 0.104 |
| 7 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.003 | 0.009 | 0.021 | 0.038 | 0.059 |
| 8 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.003 | 0.008 | 0.016 | 0.029 |
| 9 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.002 | 0.006 | 0.013 |
| 10 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.002 | 0.005 |
| 11 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.001 |
| 12 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 |

续表1

| r | a | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 | 7.5 | 8 | 8.5 | 9 | 9.5 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 0 | 0.011 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | — | — | — | — | — | — |
| 1 | 0.050 | 0.033 | 0.022 | 0.014 | 0.009 | 0.006 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | — | — | — | — |
| 2 | 0.112 | 0.084 | 0.061 | 0.044 | 0.031 | 0.022 | 0.015 | 0.010 | 0.007 | 0.005 | 0.003 | 0.002 | 0.000 | — | — | — |
| 3 | 0.168 | 0.140 | 0.113 | 0.089 | 0.068 | 0.052 | 0.038 | 0.028 | 0.020 | 0.015 | 0.010 | 0.007 | 0.001 | 0.000 | — | — |
| 4 | 0.189 | 0.175 | 0.155 | 0.133 | 0.111 | 0.091 | 0.072 | 0.057 | 0.044 | 0.033 | 0.025 | 0.018 | 0.005 | 0.001 | 0.000 | — |
| 5 | 0.170 | 0.175 | 0.171 | 0.160 | 0.145 | 0.127 | 0.109 | 0.091 | 0.075 | 0.060 | 0.048 | 0.037 | 0.012 | 0.003 | 0.001 | — |
| 6 | 0.128 | 0.146 | 0.157 | 0.160 | 0.157 | 0.149 | 0.136 | 0.122 | 0.106 | 0.091 | 0.076 | 0.063 | 0.025 | 0.008 | 0.002 | 0.000 |
| 7 | 0.082 | 0.104 | 0.123 | 0.137 | 0.146 | 0.149 | 0.146 | 0.139 | 0.129 | 0.117 | 0.103 | 0.090 | 0.043 | 0.017 | 0.006 | 0.001 |
| 8 | 0.046 | 0.065 | 0.084 | 0.103 | 0.118 | 0.130 | 0.137 | 0.139 | 0.137 | 0.131 | 0.123 | 0.112 | 0.065 | 0.030 | 0.012 | 0.004 |
| 9 | 0.023 | 0.036 | 0.051 | 0.068 | 0.085 | 0.101 | 0.114 | 0.124 | 0.129 | 0.131 | 0.130 | 0.125 | 0.087 | 0.047 | 0.021 | 0.008 |
| 10 | 0.010 | 0.018 | 0.028 | 0.041 | 0.055 | 0.071 | 0.085 | 0.099 | 0.110 | 0.118 | 0.123 | 0.125 | 0.104 | 0.066 | 0.034 | 0.015 |
| 11 | 0.004 | 0.008 | 0.014 | 0.022 | 0.033 | 0.045 | 0.058 | 0.072 | 0.085 | 0.097 | 0.106 | 0.113 | 0.114 | 0.084 | 0.049 | 0.024 |
| 12 | 0.001 | 0.003 | 0.006 | 0.011 | 0.017 | 0.026 | 0.036 | 0.048 | 0.060 | 0.072 | 0.084 | 0.094 | 0.114 | 0.098 | 0.066 | 0.036 |

续表2

| r | a | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4.5 | 5 | 5.5 | 6 | 6.5 | 7 | 7.5 | 8 | 8.5 | 9 | 9.5 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 13 | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.005 | 0.008 | 0.014 | 0.021 | 0.029 | 0.039 | 0.050 | 0.061 | 0.072 | 0.105 | 0.106 | 0.081 | 0.050 |
| 14 | — | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.004 | 0.007 | 0.011 | 0.016 | 0.024 | 0.032 | 0.041 | 0.052 | 0.090 | 0.106 | 0.093 | 0.065 |
| 15 | — | — | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.003 | 0.005 | 0.009 | 0.013 | 0.019 | 0.026 | 0.034 | 0.072 | 0.098 | 0.099 | 0.078 |
| 16 | — | — | — | — | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.004 | 0.007 | 0.010 | 0.015 | 0.021 | 0.051 | 0.086 | 0.099 | 0.088 |
| 17 | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.005 | 0.008 | 0.012 | 0.038 | 0.071 | 0.093 | 0.093 |
| 18 | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.004 | 0.007 | 0.025 | 0.055 | 0.083 | 0.093 |
| 19 | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.016 | 0.040 | 0.069 | 0.088 |
| 20 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.001 | 0.001 | 0.009 | 0.028 | 0.055 | 0.079 |
| 21 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.000 | 0.005 | 0.019 | 0.042 | 0.068 |
| 22 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.003 | 0.012 | 0.031 | 0.056 |
| 23 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.001 | 0.007 | 0.021 | 0.043 |
| 24 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.000 | 0.004 | 0.014 | 0.032 |
| 25 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 0.002 | 0.009 | 0.023 |

# 参 考 文 献


1. Вентцель Е.С. Исслдоование Операций М."наука" 1980.
2. 董泽清，排队论及其应用 中国人民大学数学教研组 1980
3. Вентцель Е.С. Теория Вероятностей м."Наука"1969
4. 陆凤山 排队论在铁路运输中的应用 铁道部第四设计院印 1979.
5. Сотников И.Б. 车站与区间能力协调(俄)М. «ТР-Т» 1978.
6. Шабалин Н.Н. 车辆在编组站上作业最优化(俄)М."ТР-Т" 1975.
7. Мамюнин И.Е. Катькало Приненение Матенатинеских Методов на пронышленнон транспорте минск«высшая школа» 1979.
8. Падня В.А. Применение теории массобово обслуживании. на транспорте м.«ТР-Т» 1969.
9. Акулиничев В.М. Вачонопоток м.«ТР-Т» 1980.
10. Каифманн А. Сяелон Я. массовэе обслуживание "мир" 1965
11. Saaty T. Elements of queueing theory with appi racations. New york moronoto 1961.
12. Cox.D. Queues New york 1961
13. Dieter König METHODEN DER BEDIENUNGSTHEORIE Akademie-Verlag. Berlin, 1976.
14. 陆凤山 排队论原理及其应用（讲稿）
15. 陆凤山、宋玉春、黄宣镌 排队模型"运输与经济"1980№2
16. 陆凤山 编组站到达场股道数量计算"运输与经济"1981年№2
17. 陆凤山 那种售票方式好？"技术经济与科学管理 1982.5.
18. 陆凤山 怎样组织排队？"技术经济与科学管理 1982.9.

19. Новиков О.А. Прикладние Вопроеы теории массового обслуживания м. «советское радио» 1969.
20. К.Ю. Рихмер статические методы в транспортных исследованиях м«транспорт» 1982.
21. А.А.Смехов Математические иодели процессов груэовой работы м «транспорт» 1982.
22. 陆风山 谢文炳 铁路编组站负荷的研究“铁道科技动态”1983 №8

[General Information]
书名=排队论及其应用
作者=陆凤山编著
页数=434
SS号=10070378
出版日期=